**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
«МОРСКОЙ ГИДРОФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ РАН»**

А. Е. Букатов, А. А. Букатов, В. В. Жарков, Д. Д. Завьялов

Распространение поверхностных волн в ледовых условиях

Севастополь 2019

УДК 551.46: 532.59: 539.3
ББК 26.221
Б90

Печатается по решению Ученого совета ФГБУН ФИЦ МГИ

Рецензенты:
д. ф.-м. наук, профессор Н.Д. Копачевский
д. ф.-м. наук, профессор К.В. Показеев

Букатов А. Е., Букатов А. А., Жарков В. В., Завьялов Д. Д.
Б90 Распространение поверхностных волн в ледовых условиях / А. Е. Букатов, А. А. Букатов, В. В. Жарков, Д. Д. Завьялов. – Севастополь: ФГБУН ФИЦ МГИ, 2019. – 204 с.
ISBN 978-5-9908460-7-4

В монографии представлены результаты теоретических исследований свободных поверхностных волн в море с плавающим битым и сплошным ледяным покровом. Рассмотрено их распространение и нелинейное взаимодействие в бассейне конечной глубины. Проведен анализ влияния неоднородностей ледяного покрова на прохождение через них поверхностных изгибно-гравитационных волн. Получены зависимости амплитудных коэффициентов прохождения и отражения волн от глубины бассейна, нормальной упругости льда и величины сжимающего усилия в ледяной пластине. Изучено влияние битого льда на нелинейный перенос массы. Дана оценка скорости движения жидких частиц под плавающим ледяным покровом при распространении прогрессивной волны конечной амплитуды.

Для научных и инженерно-технических работников, занятых в области океанологии, гидродинамики, гидроупругости, а также преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов соответствующих специальностей.

Bukatov A. E., Bukatov A. A., Zharkov V. V., Zav'yalov D. D.
Б90 Propagation of surface waves in ice conditions / A. E. Bukatov, A. A. Bukatov, V. V. Zharkov, D. D. Zav'yalov. – Sevastopol: FSBSI FRC MHI, 2019. – 204 p.
ISBN 978-5-9908460-7-4

The monograph presents the results of theoretical researches of free surface waves in the sea with a floating broken and compact ice. Their propagation and nonlinear interaction in the basin of finite depth are considered. The effect of heterogeneities in the ice cover on the passage through them of surface flexural-gravity waves are analyzed. The amplitude coefficients of transmission and reflection of waves are obtained from influence of the basin depth, the normal elasticity of ice, and the magnitude of the compressive force in the ice plate. The influence of broken ice on nonlinear mass transfer is studied. The velocity of motion of liquid particles under a floating ice cover is estimated for propagation of a progressive wave of finite amplitude.

The monograph is intended for a scientific and technical and engineering employees engaged in oceanology, hydrodynamics, hydroelasticity and also for lecturers, postgraduate students and senior students of relevant specialties.

УДК 551.46: 532.59: 539.3
ББК 26.221

ISBN 978-5-9908460-7-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Воды Мирового океана занимают более двух третей Земной поверхности и находятся в постоянном движении. Волновые процессы вносят значительный вклад в пространственно-временную изменчивость структуры физических, химических и биологических полей, играют важную роль при решении проблем практического освоения ресурсов Мирового океана.

В связи с активным освоением в последние десятилетия полярных районов океана, а также с решением важнейших хозяйственных и природоохранных задач в окраинных и внутренних замерзающих морях и водоемах особую значимость приобретает изучение волновых процессов в ледовых условиях.

В настоящей монографии представлены результаты теоретических исследований в области ледовой гидродинамики, проведенных профессором А.Е. Букатовым и его учениками. Главы 1–5 написаны Букатовым А.Е., Жарковым В.В., Завьяловым Д.Д., главы 6–10 написаны Букатовым А.Е., Букатовым А.А.

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме № 0827-2019-0003.

ГЛАВА 1. НАБЕГАНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН НА КРОМКУ ЛЬДА

1.1. Гидродинамическая модель набегания волн на кромку ледяного покрова при ледовом сжатии

Обширные районы полярного и субполярного побережья, а также побережья морей более низких широт (в зимний период), окаймлены полосой припайных и плавучих льдов. Волны, генерируемые в открытом океане или в открытых частях моря, могут проникать в эту полосу. Когда морские волны попадают на границу льда, то часть волновой энергии отражается, а часть проходит в покрытую льдом область, создавая и поддерживая волны, дисперсия которых отличается от дисперсии волн на открытой воде и определяется характеристиками ледяного покрова [164].

Ледяной покров часто испытывает сжатие, возникающее вследствие морских течений, ветров, а также температурных факторов. Ледовые сжатия могут охватывать значительные по площади участки бассейна. Эффект сжатия вследствие указанных явлений существенно меняет как характер волнения в покрытой льдом области [17–19, 38, 117, 128], так и экранирующую (пропускную) по отношению к набегающим волнам способность внешней кромки ледяного поля. Рассмотрим влияние глубины бассейна, нормальной упругости льда и величины сжимающего усилия на зависимость амплитудных коэффициентов отражения и прохождения возмущений от периода набегающей волны.

Пусть из области свободной поверхности бассейна конечной глубины H по нормали к прямолинейной кромке плавающего сплошного сжатого льда набегает плоская прогрессивная волна заданной частоты ω (рис. 1.1.1).

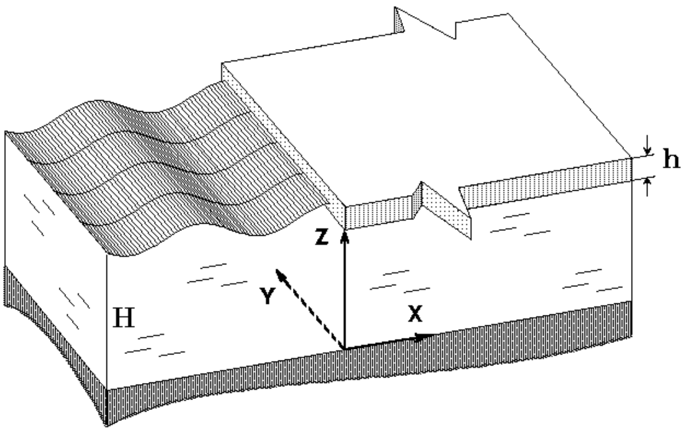

Рис. 1.1.1

Ледяной покров моделируется плавающей полубесконечной тонкой упругой пластинкой. Движение жидкости будем считать потенциальным. Выберем начало координат на дне бассейна, направим ось z вертикально вверх. Слева от вертикальной оси ($x < 0$) расположена область открытой воды с потенциалом скорости $\Phi_1(x, z, t) = \varphi_1(x,z)\exp(i\omega t)$, а справа ($x > 0$) – область, покрытая льдом, с потенциалом скорости $\Phi_2(x, z, t) = \varphi_2(x, z)\exp(i\omega t)$.

В выбранной системе координат задача заключается в решении уравнений Лапласа

$$\Delta\varphi_1 = 0, \quad -\infty < x < 0, \quad 0 < z < H, \tag{1.1.1}$$

$$\Delta\varphi_2 = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < z < H, \tag{1.1.2}$$

с граничными условиями на поверхности бассейна ($z = H$)

$$g\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} - \omega^2\varphi_1 = 0, -\infty < x < 0, \tag{1.1.3}$$

$$D\frac{\partial^5\varphi_2}{\partial z\partial x^4} - Q\frac{\partial^3\varphi_2}{\partial z\partial x^2} + (1-\kappa\omega^2)\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g}\varphi_2 = 0,\ 0 < x < \infty \tag{1.1.4}$$

и на дне ($z = 0$)

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = 0, \tag{1.1.5}$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12\rho g(1-\nu^2)}, \quad \kappa = \frac{\rho_1 h}{\rho g}, \quad Q = \frac{Q_л}{\rho g}.$$

Здесь E, h, ρ_1, ν – модуль нормальной упругости, толщина, плотность и коэффициент Пуассона льда, $Q_л$ – усилие ледового сжатия, ρ – плотность воды, g – ускорение свободного падения. Кроме того, на границе контакта областей удовлетворим условиям непрерывности потенциалов и скоростей горизонтальных волновых течений [10, 117], а на кромке льда – условиям свободного края, т.е. равенству нулю изгибающего момента и перерезывающей силы [1, 11, 44, 66, 67, 93].

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}, \quad 0 < z < H, \quad x = 0, \tag{1.1.6}$$

$$\frac{\partial^3\varphi_2}{\partial z\partial x^2} = \frac{\partial^4\varphi_2}{\partial z\partial x^3} = 0, \quad z = H, \quad x = 0. \tag{1.1.7}$$

Применяя метод разделения переменных к (1.1.1), (1.1.3), (1.1.5) и (1.1.2), (1.1.4), (1.1.5), получим дисперсионные соотношения

$$\omega^2 = rg\,\mathrm{th}(rH), \tag{1.1.8}$$

$$\omega^2 = \frac{(Dk^4 - Qk^2 + 1)kg\,\mathrm{th}(kH)}{1 + \kappa kg\,\mathrm{th}(kH)}, \tag{1.1.9}$$

связывающие фазовые характеристики волновых возмущений в областях $x < 0$ и $x > 0$ соответственно.

Решением уравнения (1.1.8) являются два действительных $\pm r$ корня, представляющих волны, распространяющиеся без затухания в положительном и отрицательном направлениях оси x соответственно. Счетное множество мнимых $\pm ir_n$, $n = 1, 2, 3,\ldots$ корней, для которых r_n находятся в промежутках $(n-\frac{1}{2})\frac{\pi}{H} < r_n < n\frac{\pi}{H}$, дает собственные волновые функции, не имеющие коэффициента фазового распространения. Они отвечают затухающим неосциллирующим волнам.

Уравнение (1.1.9) кроме двух действительных $\pm k$, имеет две пары симметричных относительно оси ординат комплексно-сопряженных $\pm\beta$ $\pm i\alpha$ (β, α – действительные, положительные), а также счетное множество мнимых $\pm ik_n$, $n = 1, 2, 3,\ldots$ корней. Модули реальной β и α частей комплексных корней определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} g(C_1C_3 - C_2C_4) - \omega^2(1+\kappa g C_1) = 0 \\ g(C_2C_3 + C_1C_4 - \omega\chi C_4) = 0 \end{cases}. \qquad (1.1.10)$$

Здесь

$$G_1 = \frac{\mathrm{th}(\beta H)(1+\mathrm{tg}^2(\alpha H))}{1+\mathrm{th}^2(\beta H)\,\mathrm{tg}^2(\alpha H)}, \quad G_z = \frac{\mathrm{th}(\alpha H)(1-\mathrm{tg}^2(\beta H))}{1+\mathrm{th}^2(\beta H)\,\mathrm{tg}^2(\alpha H)},$$

$$C_1 = D[\beta^4 - 6(\alpha\beta)^2 + \alpha^4] - Q[\beta^2 - \alpha^2] + 1, \qquad C_3 = \beta G_1 - \alpha G_2,$$

$$C_2 = D[4\beta^3\alpha - 4\beta\alpha^3] - 2Q\beta\alpha, \qquad C_4 = \beta G_2 + \alpha G_1.$$

Величины k_n являются решением уравнения

$$tg(k_nH) = -\omega^2 / \left\{ \left(Dk_n^4 + Qk_n^2 + 1 - \kappa\omega^2 \right) k_n g \right\} \qquad (1.1.11)$$

и заключены в пределах $(n-1)\frac{\pi}{H} < k_n < n\frac{\pi}{H}$.

Расположение корней уравнения (1.1.9) на комплексной плоскости для значений $H = 75$ м, $E = 3\cdot10^9$ H/м^2, $h = 1$м, $\tau = 12.4$ с при различной степени сжатия $Q = 0$, $Q = Q_0$, $Q = 1.49Q_0$ (где $Q_0 = \sqrt{D}$, наглядно представлены на рис. 1.1.2 *а, б, в* соответственно. Замкнутые контуры на рис. 1.1.2 являются изолиниями модулей функции $\omega^2(1+\kappa kg\,\mathrm{th}(kH)) - (Dk^4 - Qk^2 + 1)kg\,\mathrm{th}(kH)$. Горизонтальная ось отвечает реальной, а вертикальная – мнимой частям волновых чисел. Видно, что характерное расположение действительных (на горизонтальной оси), комплексных (попарно-симметричных относительно координатных осей) и мнимых (на вертикальной оси) корней в значительной степени зависит от ледовых условий, и в частности, от ледового сжатия, способного качественно изменить распределение корней на комплексной плоскости.

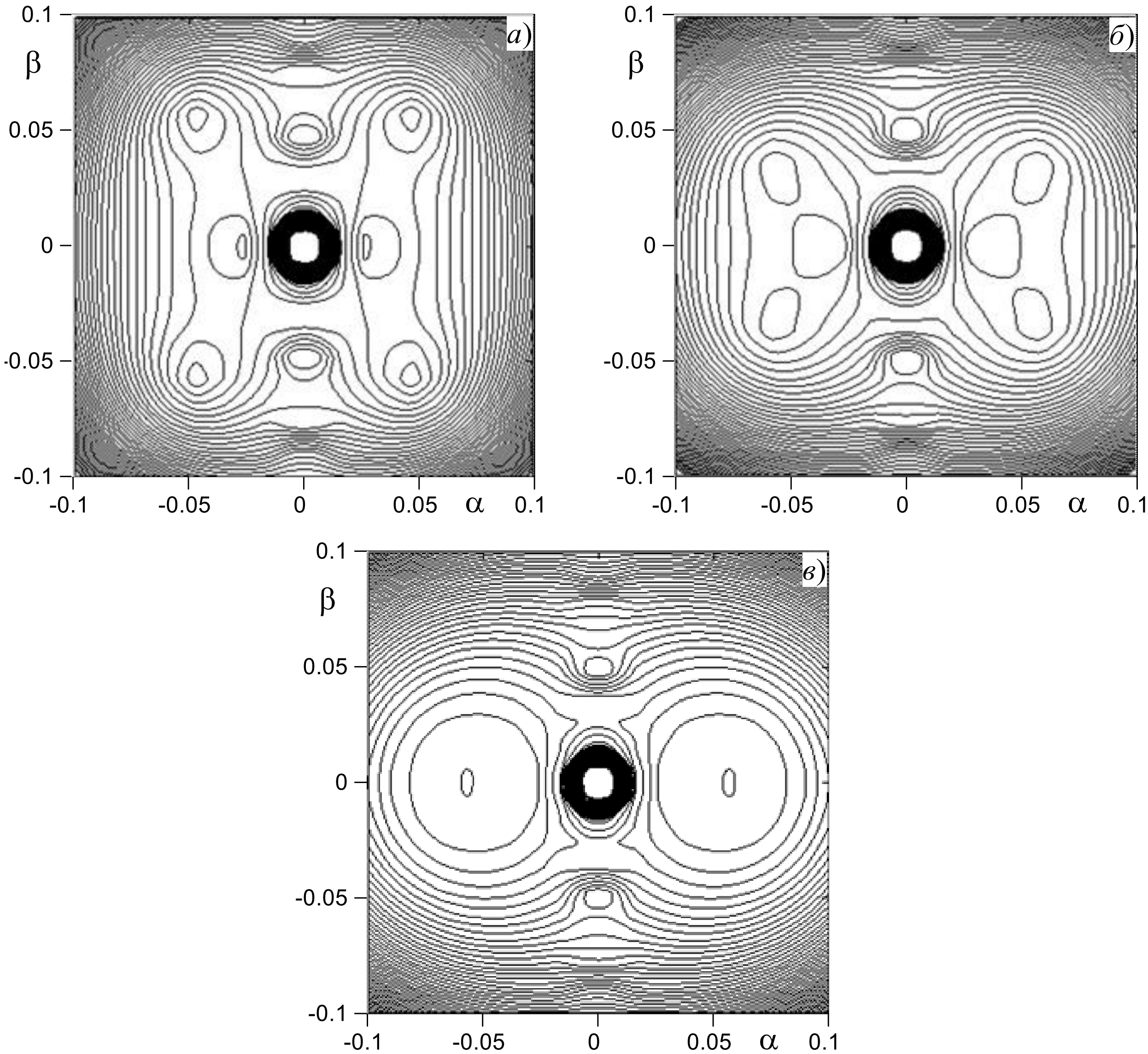

Рис.1.1.2

Рассмотрим более подробно влияние величины Q, характеризующей силы ледового сжатия, и модуля упругости E на вид решения уравнения (1.1.9). Ограничимся изменением Q в интервале значений, не превышающих некоторой предельной величины Q^*, в окрестности которой происходит смена структуры волновых возмущений и при определенных условиях возможен разлом льда [19, 31, 100]. На рис.1.1.3 *а, б, в* представлены графики зависимости модулей действительных k (жирная линия), а также реальной β (сплошная) и мнимой α (штриховая линия) частей комплексных корней по периоду τ волн. Глубина бассейна и ледовые условия здесь те же, что и для рис.1.1.2 *а, б, в*.

Увеличение Q приводит к росту k во всем диапазоне рассматриваемых периодов τ. При этом модуль реальной части также возрастает, а мнимой – убывает. Отметим однако, что при ледовом сжатии, близком к критическому Q^*, появляется отрезок в области средних периодов τ, где значения β становится меньше соответствующих значений для условия $Q = 0$. Если $Q = Q^*$, то существует период $\tau_{кр}$, на котором мнимая часть комплексного корня обращается в нуль, а реальная по величине совпадает с действительным корнем. Период $\tau_{кр}$ определяется [117] по формулам

$$\tau_{кр} = 2\pi / \omega(k_0),$$

$$\psi_0 = [(1+Dk^4)\psi_1(k) + 4Dk^4\psi_2(k)]^{-1}k^{-2},$$

$$\psi_1(k) = \mathrm{th}(kH) + kH\,\mathrm{ch}^{-2}(kH); \quad \psi(k) = (1+\kappa kg\,\mathrm{th}(kH))\,\mathrm{th}(kH),$$

где k_0 – единственный положительный корень уравнения $\psi_0'(k) = 0$, штрих означает производную по k, а ω выражается из дисперсионного соотношения (1.1.9). Для условий рис.1.1.3 в период $\tau_{кр}$ равен 12.4 с.

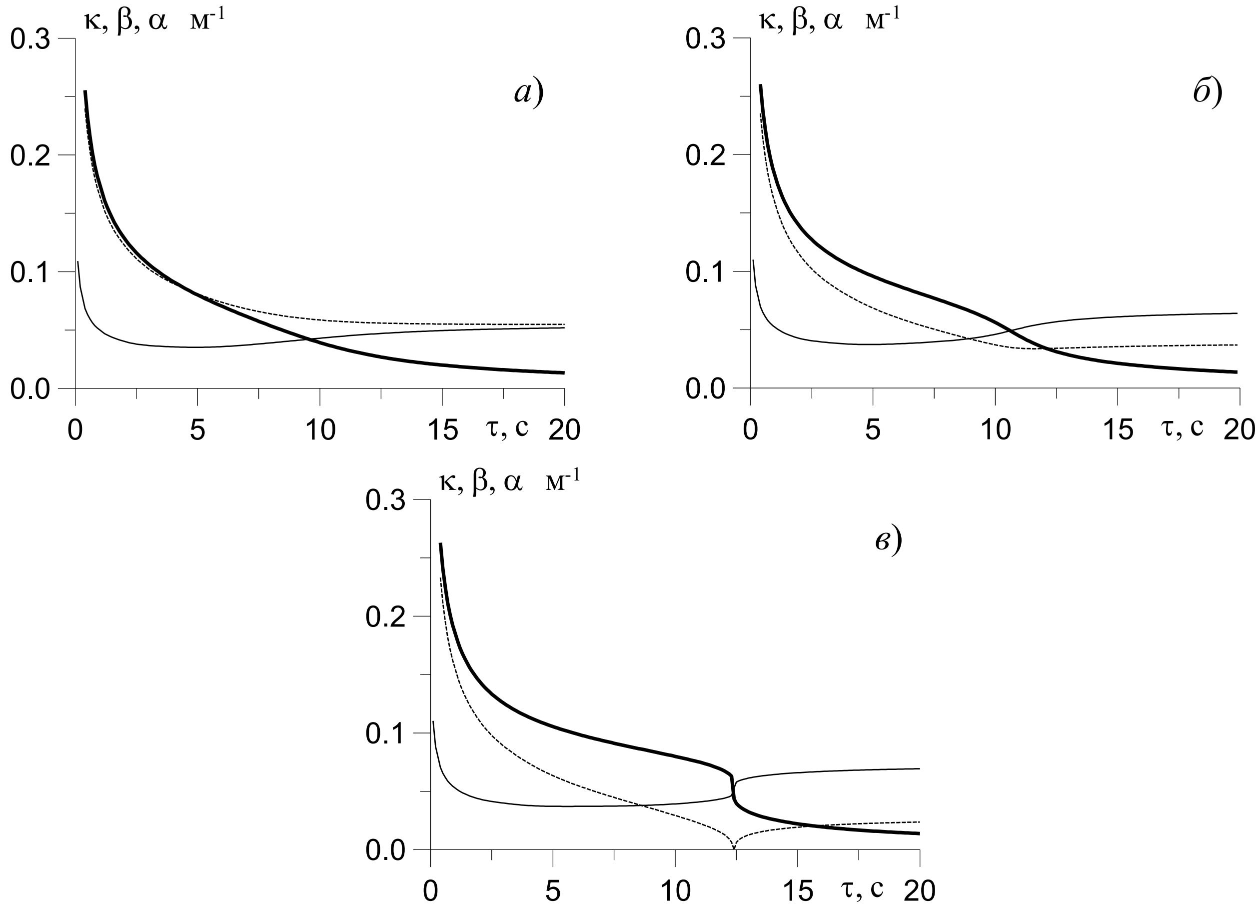

Рис. 1.1.3

Влияние Q на модули k_n мнимых корней показано на рис.1.1.4 *а, б* сплошные линии отвечают $Q = 0$, а штриховые – $Q = Q^*$. Выражение в правой части (1.1.11) как функция волнового числа при $\omega \geq 1/\sqrt{\kappa}$ имеет асимптоту, уравнение которой может быть представлено формулой

$$|k_0| = \left\{ \frac{-Q + \left(Q^2 - 4D(1-\kappa\omega^2)^{1/2}\right)}{2D} \right\}^{1/2}. \qquad (1.1.12)$$

Графическое решение уравнения (1.1.11) для $\tau = 1$ с представлено на рис.1.1.4 *а*, где сплошными и штриховыми линиями, отмеченные звездочками, указаны асимптоты (1.1.12) для случая $Q = 0$ и $Q = Q^*$ соответственно. Распределение первых пяти корней k_n (линии по порядку снизу вверх) по периоду τ показано на рис. 1.1.4 *б*. Из рисунков видно, что влияние Q на расположение мнимых корней не велико. Оно проявляется лишь в некотором увеличении k_n. Это приводит к тому, что корни k_n достигают значений $n\dfrac{\pi}{H}$ на меньших периодах.

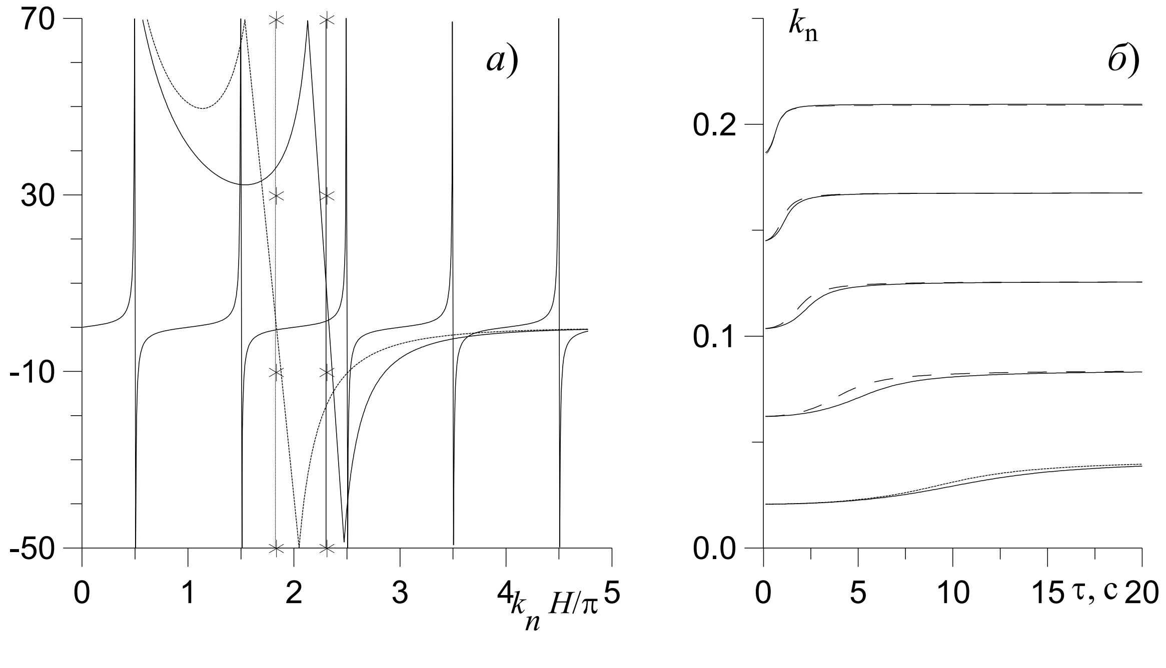

Рис.1.1.4

Уменьшение модуля упругости (цилиндрической жесткости) при отсутствии сжатия проявляется в увеличении как модулей реальной и мнимой частей комплексных, так и модулей действительных корней. Распределение β, α и k по τ иллюстрируют графики на рис. 1.1.5 и рис. 1.1.6. Линии по порядку снизу вверх на этих рисунках отвечают значениям $E = 3{\cdot}10^9$ Н/м^2, $E = 3{\cdot}10^8$ Н/м^2, $E = 3{\cdot}10^7$ Н/м^2, $E = 3{\cdot}10^6$ Н/м^2 соответственно. Величины моделей мнимых корней в этом случае, напротив, уменьшаются, что видно из рис. 1.1.7. Здесь сплошными линиями обозначены $k_1 - k_5$ (снизу вверх) для $E = 3{\cdot}10^9$ Н/м^2, а штриховыми – для $E = 3{\cdot}10^6$ Н/м^2.

Собственные функции, соответствующие действительным корням уравнения (1.1.9), описывают прогрессивные волны в области $x > 0$. Комплексные корни характеризуют краевые прогрессивно-затухающие волны. Множество мнимых корней отвечает неосциллирующим волнам, сосредоточенным, главным образом, вблизи кромки и быстро затухающих с удалением от нее.

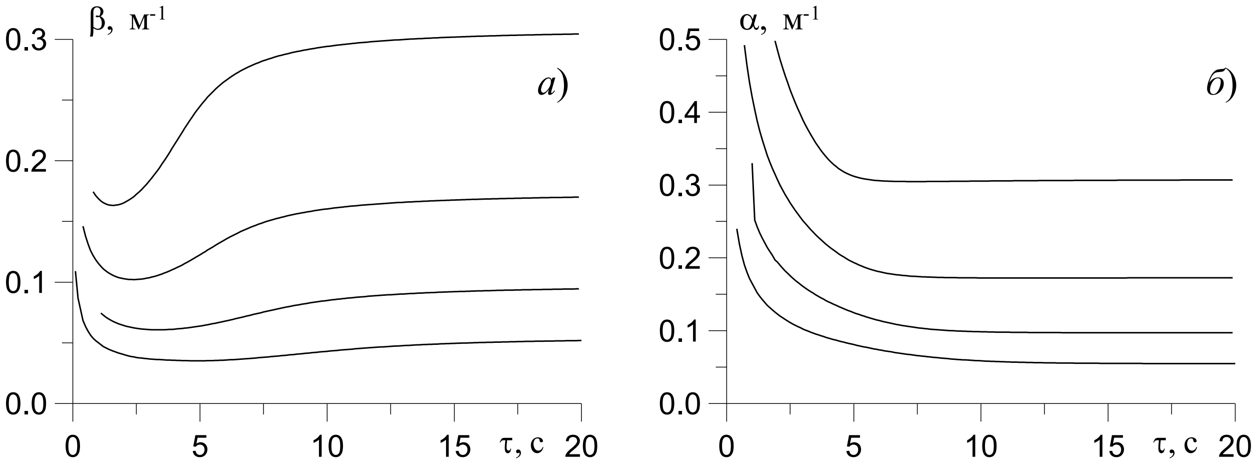

Рис.1.1.5

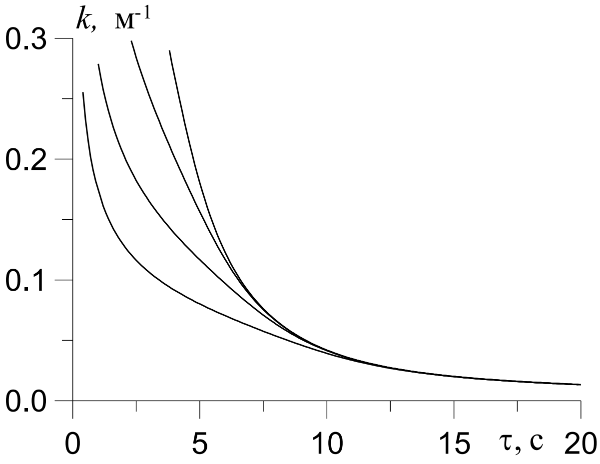

Рис.1.1.6

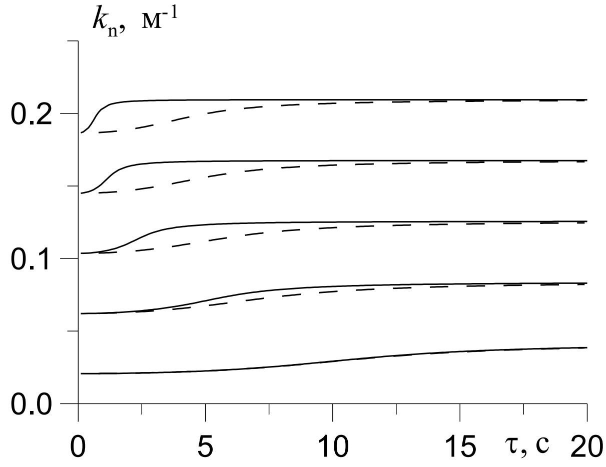

Рис.1.1.7

Хотя все описанные выше корни являются решениями соответствующих дисперсионных уравнений (1.1.8), (1.1.9). не все они имеют физический смысл для задачи о прохождении в ледяной покров и отражении от нее приходящих со стороны открытой воды волн. Учитывая ограниченность потенциалов Φ_1 при $x \to -\infty$, Φ_2 при $x \to \infty$ и отсутствие набегающей на кромку незатухающей волны из области, покрытой льдом, физическую значимость будут иметь волновые числа $\pm r$, $-ir_n$, $-k$, $-\beta\pm i\alpha$, ik_n. Тогда выражение для потенциалов скоростей запишем

$$\varphi_1 = \left[I\exp(-irx) + R^*\exp(irx)\right]\mathrm{ch}(rz) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(r_n x)\cos(r_n z), \quad (1.1.13)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= T^*\exp(-ikx)ch(kz) + T_1\exp[-(\alpha i\beta)x]cjs[(\alpha + i\beta)z] + \\ &+ T_2\exp[-(\alpha - i\beta)x]cjs[\alpha - i\beta)z] + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp[-k_n x]cjs(k_n z). \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

Все амплитудные коэффициенты потенциалов φ_1, φ_2 – комплексные. Из них I, R^*, T^* представляют падающую, отраженную и прошедшую незатухающие прогрессивные волны, характеризуемые корнями $-r$, r и $-k$ соответствующих дисперсионных уравнений. Коэффициенты $T_{1,2}$ отвечают затухающим прогрессивным волнам, обусловленным изгибной жесткостью льда. Их определяют корни $\pm\beta+i\alpha$ уравнения (1.1.9). Краевые волны, существующие по обе стороны от кромки и экспоненциально затухающие с удалением от нее, представлены корнями $-ir_n$, ik_n уравнений (1.1.8), (1.1.9) и коэффициентами A_n, B_n в областях $x < 0$ и $x > 0$ соответственно.

Если рассматривать длинные волны на мелкой воде (kH<<1), то (1.1.8) переходит в алгебраическое уравнение

$$\omega^2 = r^2 gH, \quad (1.1.15)$$

корнями которого являются $r = \pm\omega(gH)^{-1/2}$ и представляют прогрессивные волны на открытой воде. В этом приближении уравнение (1.1.9) имеет вид

$$Dk^6 - Qk^4 + (1 - \kappa\omega^2)k^2 - \omega^2 / gH = 0, \quad (1.1.16)$$

корни которого можно определить по формулам Кардана. Действительные корни

$$k = \pm\sqrt{M+N}, \quad M = \sqrt[3]{-q/2+Q}, \quad N = \sqrt[3]{-q/2-Q},.$$

$$p = -\frac{1}{D}\left\{\frac{Q^2}{3D} - 1 + \kappa\omega^2\right\}, \quad q = \frac{1}{D}\left\{\frac{Q}{3D}\left[\frac{2Q^2}{3D} - 1 + \kappa\omega^2\right] + \frac{\omega^2}{gH}\right\},$$

$$Q = \sqrt{(p/3)^3 + (q/2)^2},$$

являются волновыми числами, представляющими распространяющиеся в противоположных направлениях прогрессивные волны в области $x > 0$. Комплексные корни (1.1.6), определяемые по формулам

$$\pm\beta \pm i\alpha = \pm\left[-\frac{M+N}{2} \pm i\frac{M-N}{2}\sqrt{3}\right]^{1/2},$$

характеризуют краевые затухающие волны.

В приближении глубокой воды дисперсионное соотношение для $x < 0$ имеет вид

$$\omega^2 = rg\,. \tag{1.1.17}$$

Его корни, отвечающие прогрессивным волнам, будут $r = \pm\omega^2/g$. Выражение (1.1.9) трансформируется в алгебраическое уравнение пятой степени

$$Dk^5 - Qk^3 + (1 - \kappa\omega^2)k - \omega^2/g = 0 \tag{1.1.18}$$

с двумя действительными корнями и парой комплексно-сопряженных. Характер волновых систем, отвечающих этим корням, такой же, как и в случае мелкой воды.

Решая задачу в приближении длинных или коротких волн, из рассмотрения исключаются затухающие неосцилирующие моды, и потенциалы скорости по обе стороны от кромки имеют вид

$$\varphi_1 = \left[I\exp(-irx) + R^*\exp(irx)\right]\mathrm{ch}(rz),$$

$$\varphi_2 = T^*\exp(-ikx)ch(kz) + T_1\exp[-(\alpha + i\beta)x]\cos[(\alpha + i\beta)z] +$$
$$+ T_2\exp[-(\alpha - i\beta)x]\cos[(\alpha - i\beta)z],$$

где $\pm r$, $-k$, $-\beta \pm i\alpha$ – соответствующие корни уравнений (1.1.15), (1.1.16) (или (1.1.17), (1.1.18). В этих частных случаях можно получить лишь некоторые приближенные оценки амплитудных коэффициентов отражения от кромки и прохождения через нее прогрессивных волн заданной амплитуды. Они могут быть применены только на интервалах периодов, где хорошо выбранное приближение.

1.2. Использование вариационного подхода при численной реализации модели

Для решения поставленной задачи о набегании на кромку льда прогрессивных волн необходимо найти потенциалы скорости как в области открытой воды (φ_1), так и в области, покрытой льдом (φ_2). Кроме того, потенциал φ_1 и компонента горизонтальной скорости $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}$ должны сшиваться с потенциалом φ_2 и компонентой $\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}$ вдоль линии $x = 0$ по всей глубине жидкости 0 , $z < H$ при одновременном выполнении условий отсутствия изгибающего момента и перерезывающей силы на краю ледяной пластины. Аналитическое решение, сводящееся к обращению бесконечномерной матрицы, возникающей при склеивании бесконечного числа членов в уравнениях (1.1.13), (1.1.14), пока не найдено. В ряде работ [144, 145, 154, 165] не учитывались бесконечные суммы потенциалов краевых мод по обе стороны от кромки, тем самым исключалась возможность сшивки φ по всей глубине. Предполагалось, что большинство волновой энергии концентрируется вблизи поверхности. Это упрощение приводит к тому, что потенциалы склеивались только при $z = H$. В работах [162, 163] P. Wadhams вводит добавочный потенциал на открытой воде, дающей возможность склеивать на нескольких ($z = H$, $z = H - \lambda/4$, ...) глубинах, что до известной степени улучшает аппроксимацию. Полная задача с учетом всех систем волн формально решалась в [137] с использованием метода Винера-Хопфа. Однако, по мнению ряда авторов [137, 139], такое решение представляет огромные вычислительные сложности и в ряде случаев не является действительным или эффективным. C. Fox и V.A. Squire был предложен [139, 138] конечно-разностный метод склейки потенциалов по всей глубине жидкости с учетом достаточного числа краевых волн на открытой воде и под ледяным покровом для хорошей аппроксимации истинных $\varphi_{1,2}$.

Представим проблему сшивки потенциалов и их производных как вариационную. Тогда задача нахождения потенциалов скоростей (1.1.13), (1.1.14) сводится к минимизации функционала ошибок при сшивке (1.1.6) с заданными условиями (1.1.7). Для перехода к поиску безусловного экстремума с последующей оценкой вклада каждого условия сшивки через множители Лагранжа, запишем функционал ошибок [139] в виде

$$\varepsilon = \delta\int_0^H \left|\varphi_1 - \varphi_2\right|^2 dz + \mu\int_0^H \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right|^2 dz + \gamma\left\{\left(\frac{\partial^3\varphi_2}{\partial z\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^4\varphi_2}{\partial z\partial x^3}\right)^2\right\}, \quad (1.2.1)$$

где δ, μ, γ – неизвестные множители Лагранжа. После подстановки (1.1.13), (1.1.14) в (1.2.1) и вычисления имеющихся там интегралов, можно записать функционал ошибок в матричном виде

$$\varepsilon = c^*(\delta Q_p + \mu Q_d + \gamma Q_e)c. \quad (1.2.2)$$

Здесь с – вектор столбец реальных и мнимых частей искомых коэффициентов, а матрицы Q_p, Q_d и Q_e характеризуют соответственно невязки при склейке потенциалов, их производных и при выполнении условий свободного края на кромке льда. Символ * означает транспонирование.

Примем амплитуду потенциала падающей волны за единицу, исключая, тем самым, тривиальное решение задачи. Это предположение эквивалентно решению матричного уравнения

$$c^*Kc - 2v^*c + v^*v = 0, \quad (1.2.3)$$

где v – вектор, элементы которого расставлены так, что амплитуде I соответствует единица, а остальным коэффициентам – нули; K – квадратичная матрица, для которой

$$Kc = v, \; K^2 = K, \quad Kv = v. \tag{1.2.4}$$

Уравнение (1.2.3) является дополнительным условием к (1.2.2), и в окончательном виде функционал ошибок запишется

$$c^*(\delta Q_p + \mu Q_d + \gamma Q_e + \eta K)c - 2\eta v^* c, \tag{1.2.5}$$

здесь η – дополнительный множитель Лагранжа. Если минимизацию проводить для всех коэффициентов, т.е. включить полную модовую постановку, то, в идеале, функция ошибок должна быть равна нулю, и для любого набора положительных множителей Лагранжа минимум (1.2.5) будет задаваться решением системы (1.1.1) – (1.1.7) при условии единичной амплитуды набегающей волны. Минимизация положительно определенной квадратичной формы (1.2.5) эквивалентна [58] решению матричного уравнения

$$(\delta Q_p + \mu Q_d + \gamma Q_e + \eta K)c = \eta v. \tag{1.2.6}$$

Так как $Q = (\delta Q_p + \mu Q_d + \gamma Q_e + \eta K)$ является слабообеспеченной разреженной матрицей размера $N \times N$, при достаточно больших N реализация прямых методов решения линейных систем уравнений (1.2.6) может привести к чрезмерным вычислительным затратам [93] и, в данном случае, неэффективна. Наиболее целесообразным представляется использование итерационных методов решения линейных уравнений.

Итерационный процесс, предназначенный для решения (1.2.6), можно представить в виде [115, 118]

$$c^{(i+1)} = Gc^i + F, \quad i = 0,1,2,3..., \tag{1.2.7}$$

где G – действительная матрица перехода данного метода, а F – соответствующий известный вектор. Такой метод является методом первого порядка, поскольку приближение $c^{(i+1)}$ явно зависит только от c^i, но не зависит явно от $c^{(i-1)}$, … , c^0. Метод является линейным, поскольку ни матрица G, ни вектор F не зависит от c^i. Этот метод стационарный, поскольку ни G, ни F не зависят от номера итерации i.

Будем предполагать, что существует так называемая матрица расщепления S, для которой (E – единичная матрица)

$$G = E - S^{-1}Q, \quad F = S^{-1}\eta v. \tag{1.2.8}$$

Из предположения (1.2.8) и того факта, что матрица Q является невырожденной, следует, что $\bar{c}$ представляет собой решение смежной системы

$$(E - G)c = F, \tag{1.2.9}$$

тогда и только тогда, когда $\bar{c}$ является также решением системы (1.2.6), т.е. $\bar{c} = Q^{-1}\eta v$. Итерационный метод (1.2.7), смежная система для которой (1.2.9) обладает единственным решением $\bar{c}$, совпадающим с решением (1.2.6), называется вполне согласованным. Если $\{c^{(i)}\}$ представляет собой последовательность итерационных приближений, определяемых с помощью (1.2.7), то из свойства полной согласованности следует, что:

– если $c^{(i)} = \bar{c}$ для некоторого i, то $c^{(i+1)} = c^{(i+2)} = ...\bar{c}$,

– если последовательность $\{c^{(i)}\}$ сходится к некоторому вектору $\hat{c}$, то $\hat{c} = \bar{c}$.

Другим важным свойством итерационных методов является их сходимость. Говорят, что метод (1.2.7) сходится, если для любого начального приближения $c^{(0)}$ последовательность $c^{(1)}$, $c^{(2)}$,…, определяемая с помощью (1.2.7), сходится к $\bar{c}$. Необходимое и достаточное условие сходимости имеет вид

$$S(G) < 1,$$

где $S(G)$ – спектральный радиус, определяемый как максимум из модулей собственных значений матрицы Q. Для измерения скорости сходимости линейного стационарного итерационного метода (1.2.7) определим вектор ошибки $\varepsilon^{(i)}$ [93, 103]:

$$\varepsilon^{(i)} \equiv c^{(i)} - \bar{c}.$$

Используя (1.2.7) и тот факт, что $\bar{c}$ также удовлетворяет смежной системе (1.2.9), получаем, что

$$\varepsilon^{(i)} = G\varepsilon^{(i-1)} = G^i\varepsilon^{(0)}.$$

Таким образом, для любой векторной нормы β и соответствующей матричной нормы β имеем

$$\left\|\varepsilon^{(i)}\right\|_\beta \le \left\|G^i\right\|_\beta \left\|\varepsilon^{(0)}\right\|_\beta.$$

Следовательно, величина $\left\|G^i\right\|_\beta$ определяет, во сколько раз была уменьшена норма ошибки после i итераций. Средняя скорость сходимости метода (1.2.7) определяется формулой

$$R_i(G) \equiv -i^{-1}\ln\left\|G^i\right\|_\beta.$$

Можно показать, что если S(G) < 1, то

$$\lim_{i\to\infty}\left(\left\|G^i\right\|_\beta\right)^{1/i} = s(G),$$

а, следовательно, асимптотическая скорость сходимости

$$R_\infty(G) \equiv \lim_{i\to\infty} R_i(G) = -\ln S(G).$$

Если S(G) < 1, то грубое приближение для числа итераций, требуемых для уменьшения нормы вектора начальной ошибки в ξ^{-1}, определяется по формуле [116]

$$i \approx -(\ln\xi)/R_\infty(G).$$

Одним из эффективных итерационных методов для решения больших разреженных систем линейных алгебраических уравнений, является метод сопряженных градиентов [81, 89, 93, 115, 118]. Метод сопряженных градиентов хотя и относится к итерационным, но сходится к истинному решению линейной системы за конечное число итераций при отсутствии ошибок округления. Кроме того, при реализации процедур ускорения по методу сопряженных градиентов не требуется оценивать никакие итерационные параметры. Эти параметры генерируются автоматически в процессе выполнения итераций, а для их вычисления не требуется информация о собственных значениях матрицы G. Суть метода заключается в следующем. Пусть $c^{(0)}$ – произвольное начальное приближение и пусть последовательные приближения к решению $\bar{c}$ получаются по формуле $c^{(i+1)} = c^{(i)} + \lambda_i P^{(i)}$, где $P^{(i)}$ – «вектор направления». Для метода сопряженных градиентов положим $P^{(0)} = R^{(0)}$ и $P^{(i)} = R^{(i)} + \alpha_i P^{(i-1)}$ для $i \geq 1$, $R^{(i)} \equiv \eta v - Qc^{(i)}$, где α_i выбирается таким образом, чтобы вектор $P^{(i)}$ был Q – сопряженным к вектору $P^{(i-1)}$, т.е. $\left(P^{(i)}, QP^{(i-1)}\right) = 0$. Очевидно, что $\alpha_i = -(R^{(i)},\ QP^{(i-1)}) / P^{(i-1)},\ QP^{(i-1)})$. Выбирая λ_i из условия минимальности значения квадратичной функции (1.2.5) в направлении $P^{(i)}$, получим, что $\lambda_i = (P^{(i)}, R^{(i)})/(P^{(i)}, QP^{(i)})$. Следует отметить, что векторы невязки $R^{(0)}$, $R^{(1)}\dots$ и векторы направления $P^{(0)}$, $P^{(1)}\dots$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered}\left(R^{(i)}, R^{(j)}\right) = 0 \text{ для } i \neq j, \\ \left(P^{(i)}, QP^{(j)}\right) = 0 \text{ для } i \neq j, \\ \left(R^{(i)}, QP^{(j)}\right) = 0 \text{ для } i \neq j, \text{ и } i \neq j+1.\end{gathered} \tag{1.2.10}$$

Следовательно, векторы невязок $R^{(0)}$, $R^{(1)}\dots$ являются взаимно ортогональными, а векторы направления $P^{(0)}$, $P^{(1)}\dots$ – взаимно Q – сопряженными. Из первого соотношения (1.2.10) следует, что $R^{(s)} = 0$ для некоторого $S \leq N$.

Хотя матрица Q симметричная положительно определенная и метод сопряженных градиентов в точной арифметике должен сходиться к истинному решению $\bar{c}$ уравнения (1.2.6) самое большее за N итераций, ошибки округления нарушают указанное свойство. Оценить скорость сходимости метода позволяет неравенство [93]

$$\left\|c^{(i)} - \bar{c}\right\|_2 \leq 2\sqrt{\sigma} M^i \left\|c^{(o)} - \bar{c}\right\|_2, \tag{1.2.11}$$

где $\sigma = cond(Q) = \|Q\|_2 \cdot \left\|Q^{-1}\right\|_2$ – спектральное число обусловленности матрицы Q, а $M = \left(\sqrt{\sigma} - 1\right) / \left(\sqrt{\sigma} + 1\right)$. Заметим, что $M = 0$ при $\sigma = 1$ и $M \to 1$ при $\sigma \to \infty$. Следовательно, чем больше σ (чем хуже обусловленность

Q), тем сильнее замедлится скорость сходимости. Поэтому метод сопряженных градиентов всегда используют с той или иной формой предобусловливания.

Предполагается, что метод симметризуемый в том смысле, что существует такая невырожденная матрица симметризации W, для которой $W(E - G)W^{-1}$ будет симметричной положительно определенной матрицей. Рассмотрим смежную линейную систему

$$(E - G)c = F, \qquad (1.2.12)$$

которая является согласованной, а поэтому обладает тем же решением, что и исходная система (1.2.6). Умножив обе части системы (1.2.12) на матрицу симметризации W, получим

$$W(E - G)c = WF. \qquad (1.2.13)$$

Матрица $W(E - G)$ не обязательно является симметричной. Однако, вводя в рассмотрение новый вектор $\hat{c}=Wc$, можем записать (1.2.13) в виде

$$\hat{Q}\hat{c} = \hat{F}, \qquad (1.2.14)$$

где $\hat{Q} = W(E - G)W^{-1}, \hat{c} = Wc,\ \hat{F} = WF$. Система (1.2.14) называется переобусловленной системой, поскольку в общем случае число обусловленности матрицы $\hat{Q}$ много меньше числа обусловленности матрицы коэффициентов Q исходной системы. Основой критерия качества предобусловливания, в качестве которого принимается малость величины σ, служит известная оценка [93, 115] числа итераций метода сопряженных градиентов, достаточного для уменьшения Q^{-1} – нормы невязки $R^{(i)}$ в ξ^{-1} раз:

$$i < \frac{1}{2}\sqrt{\sigma}\ln\frac{2}{\xi}.$$

Однако, минимизация величины σ не является единственной целью предобусловливания. Необходимо учитывать более широкий спектр свойств матрицы $\hat{Q}$ (в частности, достаточно простое обращение матрицы W). Кроме того, построение предварительных оценок предобусловленности для реальных задач, как правило, не представляется возможным [93].

Для решения (1.2.6) предобусловленным методом сопряженных градиентов к матрице коэффициентов Q применялось масштабирование как один из способов явного предобусловливания (процедура Эванса-Аксельсона). В качестве матрицы симметризации W была выбрана диагональная матрица с элементами $Q_P(k,k)$, $k = 1, 2 \ldots N$, а матрицы расщепления – $S = W^{*}W$.

Выбор множителей Лагранжа δ, μ, γ, η для оптимизации сходимости задавался аналогично [139, 138]. Подходящий выбор этих множителей позволяет уменьшить число краевых мод, необходимых для вычисления амплитудных коэффициентов потенциалов (1.1.13), (1.1.14) с достаточной точностью и значительно сократить время расчетов. Нужно иметь ввиду, что различные положительные δ, μ, γ и η являются лишь весовыми членами и (при варьировании их в достаточно широких пределах) не влияют на окончательные значения искомых коэффициентов. Результаты многочисленных тестов показали, что лучший выбор множителей Лагранжа задается такими δ и μ, чтобы Q_P и Q_d имели приблизительно одинаковую L_2 – норму, т.е.

$$\delta\|Q_P\|_2 \cong \mu\|Q_d\|_2,$$

тогда как γ и η берутся достаточно большими для того, чтобы ошибка удовлетворения условий

$$c^* Q_e c \cong 0$$

на кромке была пренебрежимо мала, а условие падения на кромку вынуждающей волны – эффективно выполнено. Следует отметить, что указанное явление ограничено средними длинами генерируемых во льду волн. Для коротких волн изменение относительного веса граничных условий не дает того же эффекта для небольшого числа краевых мод, поскольку существенно ухудшается обусловленность исходной матрицы невязок Q. Т.о., расчет амплитудных коэффициентов на глубокой воде требует учета большого числа краевых мод, чем аналогичный расчет при той же толщине льда и при том же периоде набегающей волны для случая мелкой воды.

Количество n суммируемых неосциллируемых затухающих мод при численных расчетах выбиралось из условия удовлетворения заданной точности соблюдения баланса плотности потоков энергии

$$\mathrm{Im}\int_c \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} dl = 0.$$

Через замкнутую поверхность, ограничивающую выделенный объем жидкости. Объем ограничен частью поверхности бассейна, участком непроницаемого дна и вертикальными границами, равноудаленными от кромки. Плотность потока энергии J в упругой равномерно сжатой пластинке при ее изгибных колебаниях с амплитудой ξ может быть рассчитана [68] по формуле

$$J = \rho g\left[D\left(\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3}\frac{\partial\xi}{\partial t} - \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial t}\right) + Q\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial t}\right].$$

Решив (1.2.6) относительно искомого вектора c, получим потенциалы скорости (1.1.13), (1.1.14) волновых возмущений в свободной от льда области бассейна, и в области, покрытой льдом.

1.3. Анализ зависимости коэффициентов отражения и прохождения набегающих на кромку волн от ледовых условий

Для количественной оценки влияния ледового сжатия на волновые возмущения, формируемые при набегании прогрессивной волны на кромку льда, проводились численные расчеты при значениях $h = 1$ м; $\rho = 1025$ кг/м^3; $\rho_л = 870$ кг/м^3; $\nu = 0.33$. Глубина бассейна, модуль нормальной упругости ледяного покрова и величина Q, характеризующая степень сжимающего усилия, менялись в пределах 10 м $< H < 75$ м, $3{\cdot}10^5$ Н/м^2 $< E < 3{\cdot}10^9$ Н/м^2, $0 < Q < 1.4\,Q_0$ соответственно.

Графики на рис. 1.3.1 – 1.3.3. и рис. 1.3.5 иллюстрируют распределения амплитудных коэффициентов отражения R (линии 1) и прохождения T (линии 2) по периоду τ набегающей волны. Величины R и T определялись через потенциалы скоростей (1.1.13), (1.1.14) из условия неотрывности колебаний на поверхности бассейна, заключающегося в равенстве вертикальных составляющих скорости жидкости и скорости вертикального смещения ледяной пластины. Влияние степени ледового сжатия на $R(\tau)$ и $T(\tau)$ характеризуют кривые на рис.1.3.1. – 1.3.3, приведенные для глубин бассейна 10 м, 25 м, 75 м соответственно при $E = 3{\cdot}10^9$ Н/м^2. Сплошные, штриховые и штрихпунктирные линии отвечают здесь величинам Q/Q_0, равным 0; 1.0; 1.4.

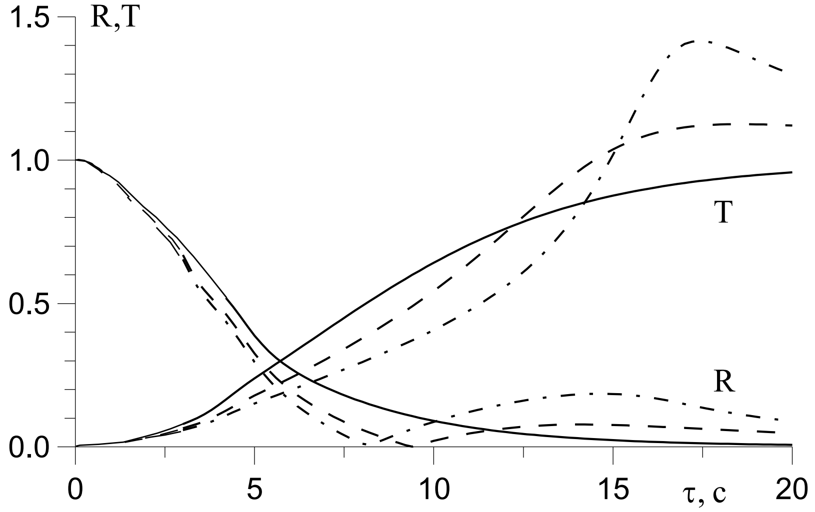

Рис. 1.3.1

Существует такое значение периода колебаний $\tau = \tau_1$, при котором ледовое сжатие не оказывает влияния на амплитуду прошедшей волны. Увеличение Q приводит к росту τ_1, в то время как увеличение глубины бассейна уменьшает его. Существует также период τ_2, когда ледовое сжатие не меняет и амплитуду отраженной волны. С ростом Q величина τ_2 уменьшается. Влияние изменения глубины бассейна H на τ_2 качественно аналогично влиянию на τ_1. Отметим, что $\tau_1 > \tau_2$. Рост Q – приводит к уменьшению коэффициентов T при $0 < \tau < {}_1$ и R при $0 < \tau < {}_2$.

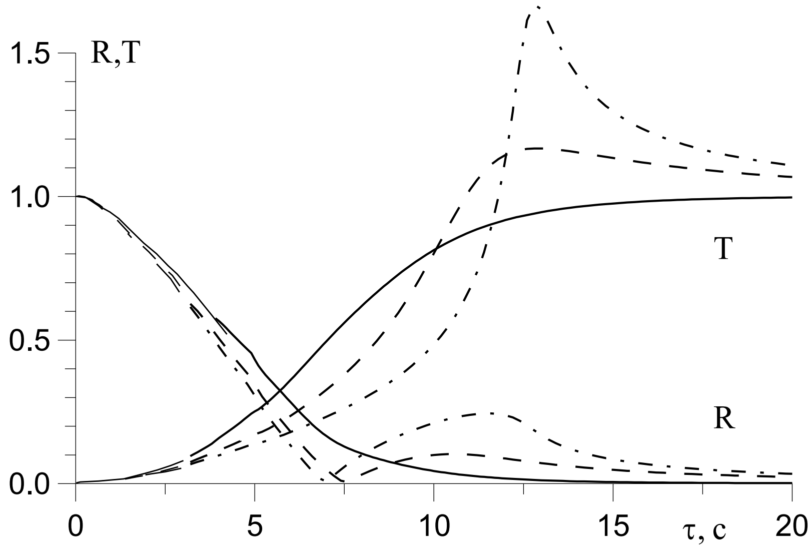

Рис. 1.3.2

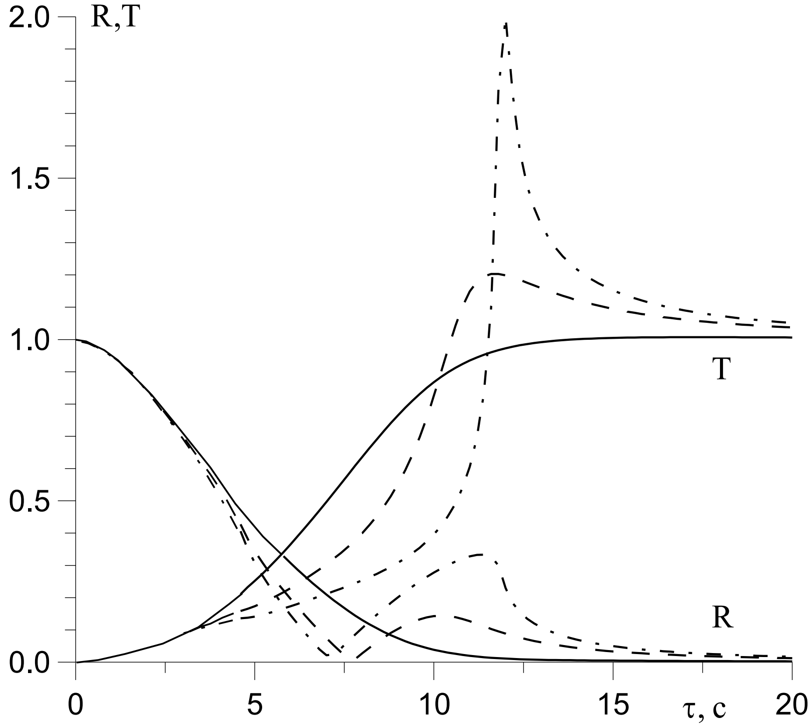

Рис. 1.3.3

Вне этих интервалов значений периодов набегающей волны соответствующие амплитудные коэффициенты отражения и прохождения увеличиваются с усилением ледового сжатия. Причем, амплитуда как прошедшей, так и отраженной прогрессивных волн имеет максимум на указанных интервалах периодов. Для амплитуды прошедшей волны он располагается в окрестности периода $\tau_3 = 2\pi/\omega(k_3)$, где k_3 – положительный корень уравнения

$$\omega''(k) = 0. \tag{1.3.1}$$

Здесь $\omega(k)$ определяется формулой (1.1.9), штрих означает производную по k. Очевидно, что на дисперсионной кривой свободных изгибно-гравитационных волн точка k_3 является точкой перегиба. Величина максимумов кривых $R(\tau)$ и $T(\tau)$ растет с увеличением ледового сжатия и глубины бассейна. Кроме того, имеется период набегающей волны, при котором практически отсутствует отражение от кромки сжатого льда. Он меньше величины τ_2 и убывает с ростом Q и H.

Как известно [117], малые свободные колебания неограниченной поверхности чистой воды имеют бесконечный сплошной спектр частот. Условия равновесия ледяной пластины позволяет из этого спектра выделить критическую частоту, являющеюся собственной частотой свободных колебаний всей системы лед – вода в целом. Для определения критического значения волнового числа при отсутствии сил ледового сжатия имеем уравнение

$$Dk_0^3 - \kappa g\,\mathrm{th}(k_0 H) = 0. \tag{1.3.2}$$

Критическая частота вычисляется по формуле

$$\omega_0 = k_2^0 \sqrt{\frac{D}{\kappa}}.$$

Для глубокой ($kH >> 1$) и мелкой ($kH << 1$) воды уравнение (1.3.2) становится алгебраическим. В случае глубокой воды выражение для критических значений волнового числа, длины волны, частоты и периода свободных колебаний имеют вид:

$$k_0 = \left\{\frac{\kappa g}{D}\right\}^{1/3}, \quad \lambda_0 = 2\pi\left\{\frac{D}{\kappa g}\right\}^{1/3},$$

$$\omega_0 = \left\{\frac{\kappa g^4}{D}\right\}^{1/6}, \quad \tau_0 = 2\pi\left\{\frac{D}{\kappa g^4}\right\}^{1/6}.$$

Соответствующие критические значения волнового числа, длины волны, частоты и периода для мелкой воды определяются по формулам:

$$k_0 = \sqrt{\frac{\kappa g H}{D}}, \quad \lambda_0 = 2\pi\left\{\frac{D}{\kappa g H}\right\}^{1/6},$$

$$\omega_0 = gH\sqrt{\frac{\kappa}{D}}, \quad \tau_0 = \frac{2\pi}{gH}\sqrt{\frac{D}{\kappa}}.$$

При $k = k_0$ удовлетворяются одновременно уравнения частот для изгибных волн, распространяющихся в свободной пластине, гравитационных волн на поверхности открытой воды, а также для изгибно-гравитационных волн, распространяющихся одновременно в воде и ледяной пластине. В этом случае архимедовы силы полностью уравновешиваются гидродинамическим усилиям, так что вода перестает поддерживать ледяной покров, равновесие которого достигается лишь за счет внутренних сил упругости, развивающихся в самой пластине. Этот случай можно рассматривать как резонансный.

В условиях ледового сжатия критическое волновое число определяется по формуле

$$Dk^4 - Qk^2 - \kappa kg\,\mathrm{th}(kH) = 0. \qquad (1.3.3)$$

В приближении длинных ($kH << 1$) и коротких ($kH >> 1$) волн решение уравнения (1.3.3) имеет вид

$$k_0 = \sqrt{2aH + Q_1/D_1} \quad \text{и} \quad k_0 = \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a-b}$$

соответственно. Здесь

$$a = \frac{\kappa g}{2D}, \quad b = \sqrt{a^2 + (Q/3D)^3}.$$

Ледовое сжатие обусловливает превышение амплитуды прошедшей волны над амплитудой падающей, начиная с некоторого ее периода $\tau = \tau_*$. Период набегающей волны τ_*, при котором ее амплитуда совпадает с амплитудой прошедшей, находится между величинами τ_0=$2\pi/\omega(k_0)$ и τ_3=$2\pi/\omega(k_3)$, где k_0 и k_3 – корни уравнений (1.3.3), (1.3.1); $\tau_0 < \tau_3$. На рис. 1.3.4, приведенном для условий $H = 25$ м, $h = 1$ м, $E = 3\cdot10^9$ Н/м^2, $Q = 1.4Q_0$, точки на кривых, отвечающие периодам τ_0, τ_* и τ_3 обозначены кружками, звездочками и треугольниками. Сплошная и штриховая линии на рис. 1.3.4 *а* представляют собой дисперсионные кривые для областей $x > 0$ и $x < 0$, а сплошная, штриховая и штрихпунктирная линии на рис. 1.3.4 *б* – величины амплитудных коэффициентов прохождения $T(\tau)$, $T^*(\tau)/I$ и отношение $\dfrac{k\,\mathrm{sh}(kH)}{r\,\mathrm{sh}(rH)}$.

Превышение по $T(\tau)$ может достигать двух раз и сопровождается уменьшением длины прошедшей волны, которая при $\tau > \tau_0$ короче, чем длина падающей. Коэффициент прохождения T может быть заметно больше единицы и при отсутствии сжимающих усилий в случае малой жесткости льда. Зависимость $R(\tau)$ при $Q = 0$ монотонно убывает для любых значений модуля упругости. Это иллюстрируют графики распределения R и T по τ, приведенные на рис. 1.3.5 при отсутствии сжатия ($Q = 0$) сплошной, штриховой и штрихпунктирной линиями для значений модуля нормальной упругости $3 \cdot 10^9$ Н/м^2; $3 \cdot 10^7$ Н/м^2; $3 \cdot 10^5$ Н/м^2 соответственно. Глубина бассейна и толщина льда принималась равными $H = 25$ м и $h = 1$ м.

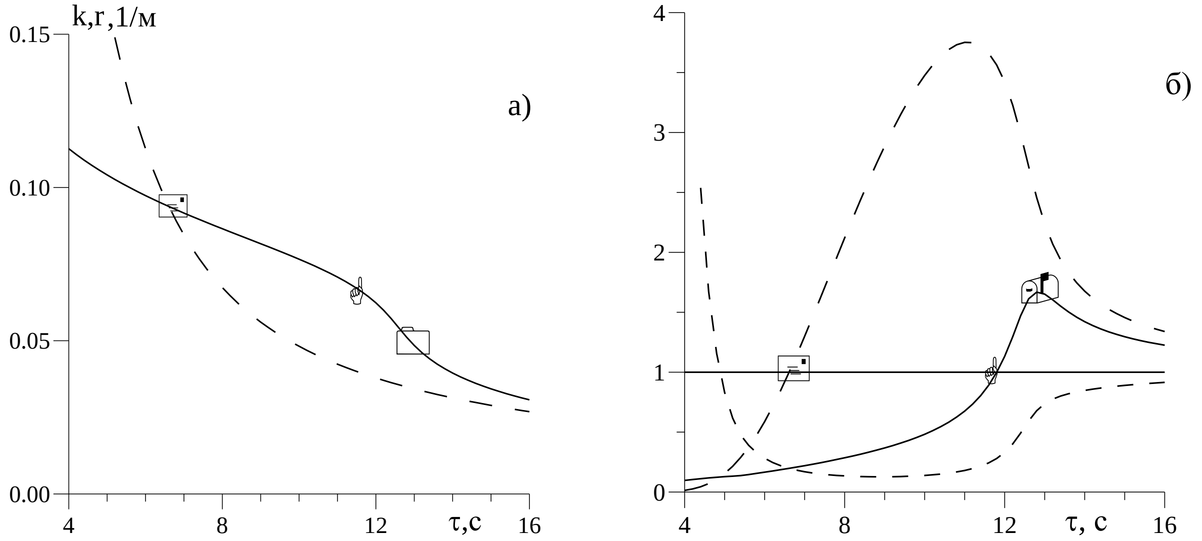

Рис. 1.3.4

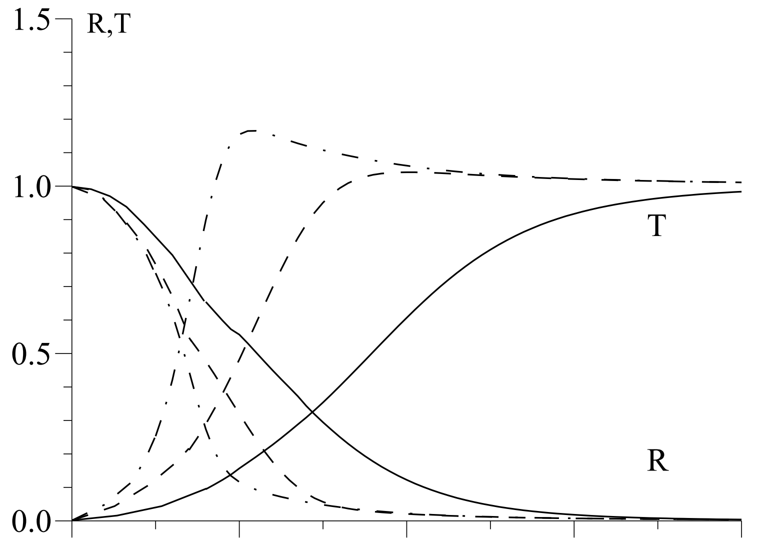

Рис.1.3.5

Зависимость τ_0 от степени ледового сжатия при различных значениях модуля упругости льда характеризуют графики на рис.1.3.6. Линии по порядку снизу вверх соответствуют здесь значениям E (Н/м^2), равными $3 \cdot 10^5$; $3 \cdot 10^7$; $3 \cdot 10^8$; $3 \cdot 10^9$ (H и h как и для 1.3.5). Видно, что τ_0 убывает с увеличением степени ледового сжатия, причем тем быстрее, чем больше модуль упругости E. Рост цилиндрической жесткости ледяной пластины (т.е. толщины льда и модуля упругости) приводит к увеличению значения критического периода τ_0.

Часть энергии падающей волны расходуются на возбуждение затухающих прикромочных возмущений. Поэтому пренебрежение членами, отвечающими краевым быстрозатухающим модам в формулах (1.1.13), (1.1.14) при оценке отражающей и пропускной способностей кромки сплошного сжатого льда, может привести к существенным погрешностям на средних периодах. Так, например, для ледовых условий, соответствующих условиям рис.(1.3.5), ошибка в расчетах амплитудных коэффициентов может достигать ~ 50%.

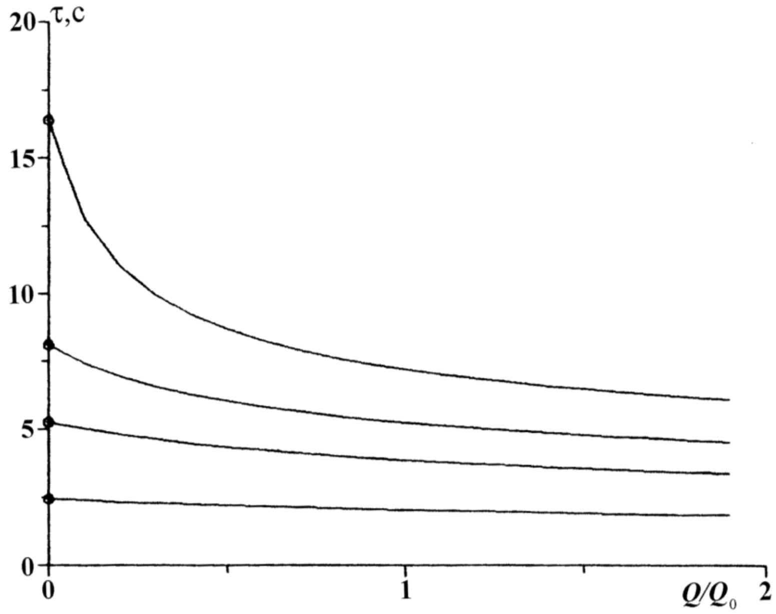

Рис. 1.3.6

Отметим, что модель позволяет учесть вязкие свойства ледяного покрова, пологая модуль упругости комплексной величиной [158, 163]. Однако, вязкие эффекты на рассматриваемых масштабах движения и амплитуд волн будут пренебрежимо малы [113].

ГЛАВА 2. ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИЗГИБНО–ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ПРИ НАЛИЧИИ РАЗЛОМА ЛЬДА

2.1. Распространение изгибно-гравитационных волн через трещину в ледяном покрове

Пусть на поверхности бассейна постоянной конечной глубины H плавают две полубесконечные упругие пластины, моделирующие ледяной покров с трещиной [32]. Рассмотрим влияние трещины на поверхностные изгибно-гравитационные волны, распространяющиеся по нормали к ней. Движение жидкости будем считать потенциальным. Выберем начало координат на дне бассейна, направив ось z вертикально вверх. Слева ($x < 0$) и справа ($x > 0$) от вертикальной оси расположены области воды, покрытые льдом толщиной h_1 и h_2 соответственно. Потенциалы скорости движения жидкости в этих областях обозначим через $\Phi_1(x, z, t) = \varphi_1(x,z)\exp(i\omega t)$ и $\Phi_2(x,z,t) = \varphi_2(x,z)\exp(i\omega \mathrm{t})$. Здесь ω – заданная частота падающей из области $x < 0$ волны. Рассмотрим зависимость распределений амплитудных коэффициентов отражения и прохождения возмущений по периоду набегающей волны от глубины бассейна, характеристик льда и величины сжимающего усилия.

В выбранной системе координат задача сводится к решению уравнений Лапласа

$$\Delta\varphi_j = 0 \tag{2.1.1.}$$

с граничными условиями на поверхности бассейна ($z = H$)

$$D_j \frac{\partial^5\varphi_j}{\partial z\partial x^4} - Q_j \frac{\partial 3\varphi_j}{\partial z\partial x^2} + (1-\kappa_j\omega^2)\frac{\partial\varphi_j}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g}\varphi_j = 0 \tag{2.1.2}$$

и на дне ($z = 0$)

$$\frac{\partial\varphi_j}{\partial z} = 0, \tag{2.1.3}$$

где $D_j = \dfrac{E_j h_j^3}{12\rho g(I-\upsilon_j^2)}$, $\kappa_j = \dfrac{\rho_j h_j}{\rho g}$, $Q_j = \dfrac{Q_{1j}}{\rho g}$, $j = \begin{cases} 1, & -\infty < x < 0 \\ 2, & 0 < x < +\infty \end{cases}$,

E_j, h_j, ρ_j, ν_j – модуль нормальной упругости, толщина, плотность, коэффициент Пуассона льда, Q_{1j} – сжимающее усилие, ρ – плотность воды. Кроме того, на границе контакта областей удовлетворим условиям непрерывности потенциалов и скоростей горизонтальных волновых течений

$$\varphi_1 = \varphi_2,\quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x},\quad 0 < z < H,\quad x = 0, \tag{2.1.4}$$

а на кромках льда – условиям свободного края, заключающимся в равенстве нулю изгибающего момента и перерезывающей силы

$$\frac{\partial^3 \varphi_j}{\partial z \partial x^2} = \frac{\partial^4 \varphi_j}{\partial z \partial x^3} = 0, \quad z = H, \qquad x = 0. \tag{2.1.5}$$

Применяя метод разделения переменных к (2.1.3) – (2.1.5), получим дисперсионные соотношения

$$\omega^2 = \frac{\left(D_j r_j^4 - Q_j r_j^2 + 1\right) r_j g \,\text{th}(r_j H)}{1 + \kappa_j r_j g \,\text{th}(r_j H)}, \tag{2.1.6}$$

связывающие фазовые характеристики волновых возмущений в областях $x < 0$ и $x > 0$ соответственно. Решением уравнений (2.1.6) являются четыре действительных $\pm r_j$, четыре пары комплексно-сопряженных $\beta_j \pm i\alpha_j$, $-\beta_j \pm i\alpha_j$ и счетные множества мнимых $\pm ir_{jn}$, $n = 1, 2, 3\ldots$ корней. Учитывая ограниченность потенциалов φ_1 при $x \to -\infty$, φ_2 и отсутствия набегающей на трещину незатухающей волны из области $x > 0$, запишем

$$\begin{gathered}\varphi_2 = T^* \exp(-ir_2 x) ch(r_2 z) + T_1 \exp[-(\alpha_2 + i\beta_2) x \cos[\alpha_2 + i\beta_2) z] + \\ + T_2 \exp[-(\alpha_2 - i\beta_2) x] \cos[(\alpha_2 - i\beta_2) z] + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp[-r_{zn} x] \cos(r_{zn} z).\end{gathered} \tag{2.1.8}$$

Все амплитудные коэффициенты потенциалов φ_1, φ_2 – комплексные. Из них *I, R*, T** представляют падающую, отраженную и прошедшую незатухающие прогрессивные волны, характеризуемые корнями $-r_1$, r_1 и $-r_2$ соответствующих уравнений. Коэффициенты $R_{1,2}$ и $T_{1,2}$ отвечают затухающим прогрессивным волнам, обусловленным изгибной жесткостью льда. Их определяют комплексные корни $\pm\beta_1 - i\alpha_1$ и $\pm\beta_2 + i\alpha_2$ уравнений (2.1.6). Краеые волны, существующие по обе стороны от трещины и экспоненциально затухающие с удалением от нее, представлены мнимыми корнями ir_{jn} уравнений (2.1.6) и коэффициентами A_n, B_n в областях $x < 0$ и $x > 0$ соответственно.

Представив задачу удовлетворения условий (2.1.4), (2.1.5) как вариационную, произведем минимизацию функционала

$$\varepsilon = \delta \int_0^H \left|\varphi_1 - \varphi_2\right|^2 dz + \mu \int_0^H \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right|^2 dz + \gamma \sum_{j=1}^{2} \left\{ \left(\frac{\partial^3 \varphi_j}{\partial z \partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial 4 \varphi_j}{\partial z \partial x^3} \right)^2 \right\} \tag{2.1.9}$$

способом, аналогичным изложенному в 1.2 главы 1. Тем самым, мы осуществляем сшивку потенциалов и скоростей горизонтальных волновых течений на границе контакта областей ($x = 0$) по всей глубине бассейна, выполняя одновременно условия свободного края при набегании на трещину прогрессивной волны единичной амплитуды. В результате получим амплитудные коэффициенты I, R^*, $R_{1,2}$, A_n потенциала скорости φ_1 в области $x < 0$ и коэффициенты T^*, $T_{1,2}$, B_n потенциала φ_2 в области $x > 0$.

Для количественной оценки зависимости распределения амплитудных коэффициентов отражения R и прохождения T (определяемых через потенциалы $\varphi_{1,2}$ из кинематического соотношения), отнесенных к амплитуде падающей волны, по периоду τ колебаний от характеристик льда и глубины бассейна, проводились численные расчеты при значениях $\rho = 1025$ кг/м^3, $\rho_{1,2} = 870$ кг/м^3, $\upsilon_{1,2} = 0.3$. Толщина льда h_j(м), модуль его упругости E_j (Н/м^2, величина Q_j(м^2), характеризующая степень ледового сжатия и глубина бассейна H(м) изменялись соответственно в пределах [0; 2], [$3{\cdot}10^7$; $3{\cdot}10^9$], [0; $1/3\sqrt{D_j}$], [10; 200]. Рассматривались волны с периодами τ до 20 сек.

Некоторые из результатов расчетов, наглядно иллюстрирующих возможные проявления характерных особенностей волновых режимов, изображены графически на представленных рисунках. Анализ результатов расчетов показал, что пренебрежение прикромочными затухающими модами, исключающие возможность сшивки потенциалов φ_1, φ_2 и горизонтальных составляющих скоростей $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}$ и $\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}$ по всей глубине жидкости под трещиной ($x = 0$), не в полной мере отражает физическую сущность изучаемого явления. Особенно ярко это проявляется в диапазонах малых ($\tau < 5$ сек) и средних (5 сек< τ < 15 сек) периодов. На малых периодах имеет место существенное занижение значения R и завышение значения T, которые могут достигать порядка 50 %. Это видно из сопоставления графиков, приведенных на рис. 2.1.1 при отсутствии ледового сжатия для $H = 25$ м, $E = 3{\cdot}10^9$ Н/м^{3,} $h_1 = h_2 = 0.25$ м (*а*) и $h_1 = h_2 = 1$ м (*б*). Сплошные линии соответствуют здесь сшивке по всей глубине, а штриховые – только на поверхности бассейна. В диапазоне средних периодов различие в сшивках потенциалов и горизонтальных скоростей при $x = 0$, слабо сказываясь на коэффициенте T, могут как уменьшить (на мелкой воде), так и увеличить (на глубокой воде) значение R.

Зависимости распределений R и T по периоду колебаний от глубины бассейна, толщины льда, его жесткости и степени ледового сжатия приведены графически для $h = 2$ м (рис. 2.1.2, рис. 2.1.4); $Q = 0$ (рис. 2.1.2 – 2.1.4), $H = 50$ м, (рис.2.1.3), $H = 25$ м, (рис. 2.1.4, рис. 2.1.5); $h = 1$ м (рис. 2.1.5). Они получены для одинаковых ледовых условий по обе стороны от трещины при модуле упругости льда $E = 3{\cdot}10^9$ Н/м^3 (кроме рис. 2.1.4). Пунктирные, штриховые и сплошные линии отвечают здесь глубинам 10 м, 25 м, 50 м (рис. 2.1.2); толщина льда 0.5 м, 1 м, 2 м (рис. 2.1.3), значениям модуля Юнга $3{\cdot}10^7$, $3{\cdot}10^8$, $3{\cdot}10^9$ Н/м^3 (рис. 2.1.4); и величинам Q_j, равным 0, Q_0, $1.3Q_0$ (рис. 2.1.5).

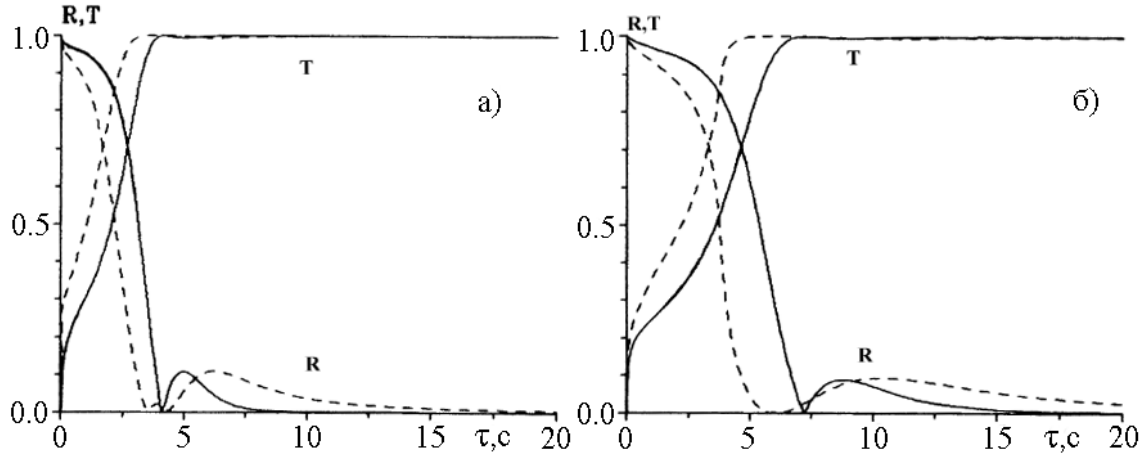

Рис. 2.1.1

Результаты расчетов показали, что для фиксированной толщины льда существует период τ_*, при котором $R = T = I/\sqrt{2}$. Он практически не зависит от глубины бассейна и определяется исключительно параметрами ледовой пластины. Значение τ_* растет с увеличением упругости и толщины льда, что видно из сопоставления графиков на рис. 2.1.2 – 2.1.4. Кроме того, при определенных условиях, может существовать период τ_0 полного прохождения волн средней длины через трещину в ледяном покрове постоянной толщины. Величина τ_0 смещается в сторону меньших периодов с ростом глубины бассейна. При $\tau_0 < \tau < \infty$ функция $T(\tau)$ имеет минимум, величина которого близка к единице. Период полного прохождения укорачивается с уменьшением жесткости ледяного покрова.

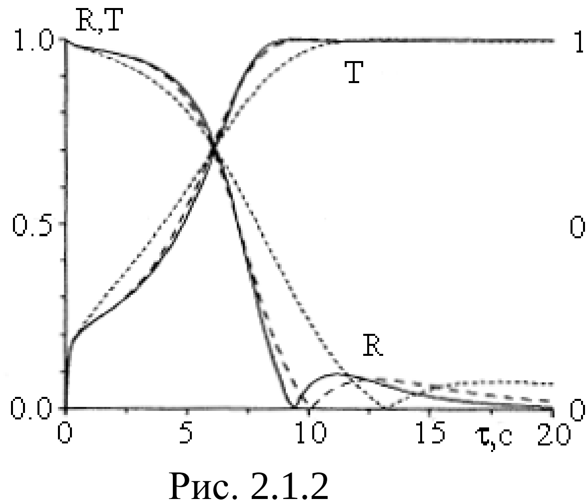

Рис. 2.1.2

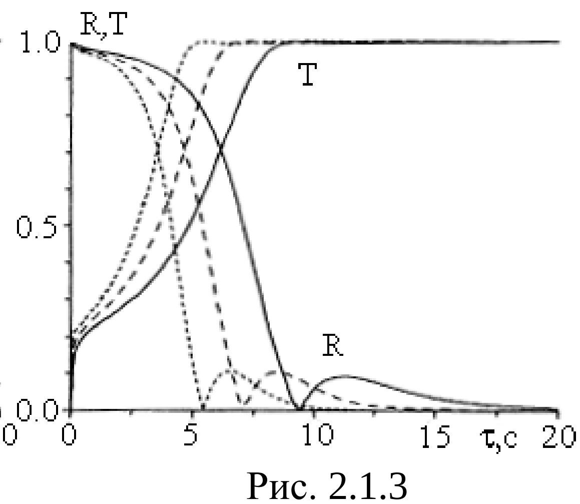

Рис. 2.1.3

Амплитудный коэффициент прохождения T (отражения R) на периодах $\tau < \tau^*$ убывает (возрастает), а при $\tau > \tau^*$ – возрастает (убывает) с увеличением глубины H. Рост толщины льда приводит к уменьшению T и увеличению R. Увеличение степени ледового сжатия в рассматриваемом диапазоне усиливает (ослабляет) коэффициент прохождения (отражения) на периодах $\tau < \tau_0$. Если $\tau > \tau_0$, то направленность влияния ледового сжатия на R и T меняется, существенно проявляясь в ограниченном интервале периодов (рис. 2.1.5). Кроме того, в условиях ледового сжатия полное отражение может иметь место на двух различных периодах.

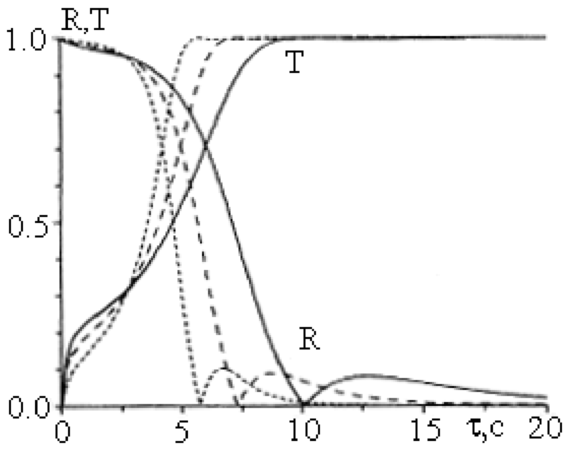

Рис. 2.1.4

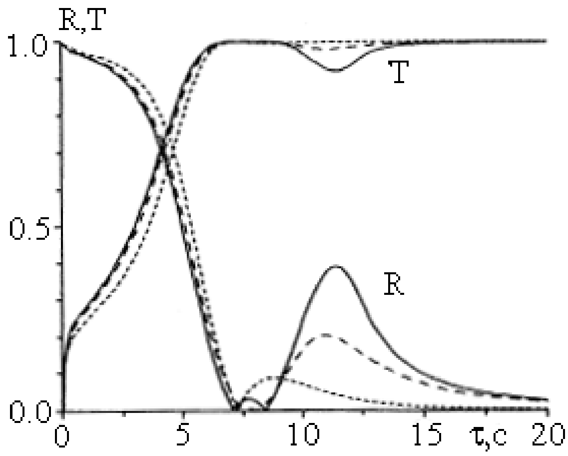

Рис. 2.1.5

Уменьшение толщины льда в области, из которой на трещину набегает прогрессивная волна, приближает картину возмущений к формируемой в случае набегания волн на кромку со стороны открытой воды [35]. Иллюстрацией зависимости коэффициентов прохождения и отражения от изменения h_1 являются графики на рис. 2.1.6, полученные при $h_2 = 1$ м и $H = 25$ м. Сплошные, штриховые и пунктирные линии соответствуют значениям h_1, равным 0.1 м, 0.6 м, 0.9 м.

В случае, когда прогрессивные волны из области моря, покрытого более толстым льдом, проходят через трещину в области с менее толстым льдом, их амплитуда для любого τ из интервала периодов $\tau > 2\pi / \omega(r_0)$ (где r_0 – общий корень уравнений (2.1.6)) возрастает. Это иллюстрируют графики зависимости ($R(r)$ и $T(\tau)$ на рис. 2.1.7, приведенные при $H = 25$ м, $h_1 = h_2 = 2$ м (сплошные линии); $h_1 = 2$ м, $h_2 = 1.5$ м (штриховые линии). Коэффициент отражения для $h_1 > h_2$ почти всегда больше, чем в случае $h_1 = h_2$. Однако, в некотором интервале из области средних периодов, справедливо обратное утверждение. Кроме того, для $h_1 > h_2$ отсутствует период τ_0 полного прохождения волн средней длины ($R \approx 0$, что имеет место в случае равных ледовых условий по обе стороны от трещины. Следует отметить, что амплитудный коэффициент отражения при прохождении изгибно-гравитационных волн через трещину со стороны тонкого льда толщиной $h_1 = h_{11}$ в область, покрытую льдом большей толщины $h_2 = h_{22}$

практически такой же, как и при распространении волн со стороны толстого в сторону тонкого льда, если $h_1 = h_{22}$, $h_2 = h_{11}$; $h_{11} < h_{22}$.

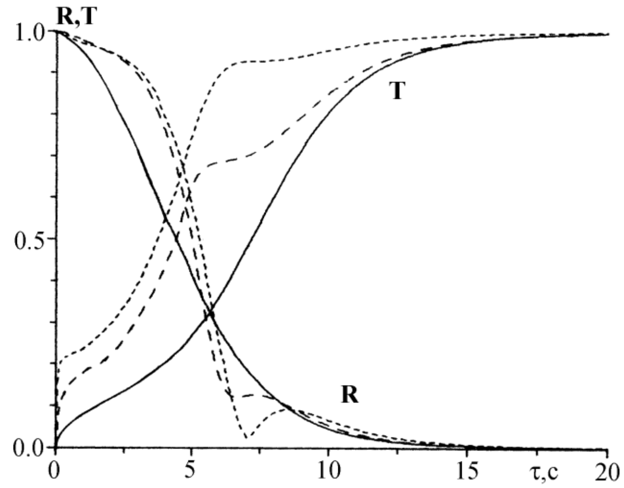

Рис. 2.1.6

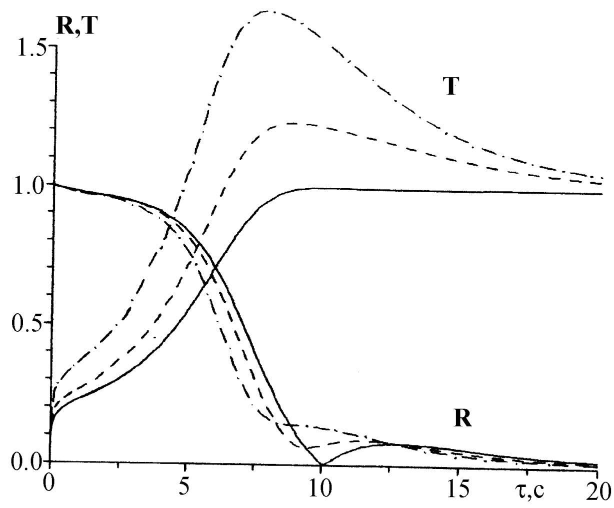

Рис. 2.1.7

2.2. Распространение изгибно-гравитационных волн через линию контакта двух полубесконечных плавающих льдин

Рассмотрим теперь влияние разлома льда на поверхностные изгибно-гравитационные волны, распространяющиеся по нормали к линии контакта льдин в случае налегания их одной на другую.

Математическая постановка задачи [33] сходна с постановкой, изложенной в разделе 2.1. Исключение составляют условия на стыке пластин ($z = H$, $x = 0$), заключающиеся здесь в непрерывности вертикальных смещений кромок обеих льдин (ζ_j) и произвольности их наклонов [68, 80, 62]

$$\zeta_1 = \zeta_2, \qquad \frac{\partial^3 \varphi_j}{\partial z \partial x^2} = 0, \qquad D_1 = \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial z \partial x^3} = D_2 \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial z \partial x^3}. \qquad (2.2.1)$$

Кроме того, на границе контакта областей ($0 < z < H$, $x = 0$) удовлетворим условиям непрерывности потенциалов и скоростей горизонтальных волновых течений (2.1.4), а также сформулированным выше условиям (2.2.1). Рассмотрим зависимость амплитудных характеристик возмущений от толщины льда, степени его сжатия, частоты набегающей волны и глубины бассейна.

Применяя метод разделения переменных к (2.1.1) – (2.1.3), получим дисперсионные соотношения (2.1.6), связывающее фазовые характеристики волновых возмущений. Решения уравнений (2.1.6) в каждой из областей $x < 0$ и $x > 0$ будут такими же, как и для условий трещины. Вид потенциалов, учитывающий ограниченность φ_1 при $x \to -\infty$, при $x \to \infty$ и отсутствие набегающей на разлом незатухающей волны из области $x > 0$, представлен формулами (2.1.7), (2.1.8). Подобно случаю трещины, в рассмотрение принимаются системы прогрессивных, прогрессивно-затухающих и экспоненциально-затухающих неосцилирующих краевых волн по обе стороны от линии контакта льдин. Представляя задачу удовлетворения условий (2.1.4), (2.1.2) как вариационную и минимизировав функционал

$$\varepsilon = \delta \int_0^H |\varphi_1 - \varphi_2|^2 dz + \mu \int_0^H \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right|^2 dz + \upsilon |\zeta_1 - \zeta_2|^2 +$$
$$+ \theta \left| D_1 \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial z \partial x^3} - D_2 \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial z \partial x^3} \right|^2 + \gamma \sum_{j=1}^{2} \left\{ \left(\frac{\partial^3 \varphi_j}{\partial z \partial x^2} \right)^2 \right\} \tag{2.2.2}$$

определим вектор–столбец реальных и мнимых частей искомых амплитудных коэффициентов потенциалов скорости волновых возмущений в областях бассейна по обе стороны от разлома. Из кинематических условий $\partial \zeta_j / \partial t = \partial \varphi_j / \partial z$ найдем возвышения изгиба льда ζ_j.

Расчеты проводились для значений $E = 3 \cdot 10^9$ Н/м^2, $\nu = 0.33$, $\rho_1 = 870$ кг/м^3, плотность воды полагалась равной $\rho = 1025$ кг/м^3. Полученные распределения амплитудных коэффициентов отражения R и прохождения T, отнесенных к амплитуде падающей волны, по периоду колебаний τ для случая одинаковых характеристик льда по обе стороны от линии контакта, представлены на рис. 2.2.1 – 2.2.2. Влияние глубины бассейна, толщины льда и ледового сжатия на распределение R и T по τ характеризуют графики на рис. 2.2.1 – 2.2.3. Сплошные, штриховые, штрихпунктирные и пунктирные линии на этих рисунках отвечают значениям глубины бассейна 10 м, 15 м, 25 м, 50 м и $h = 1$ м при $Q = 0$ (рис. 2.2.1); толщины льда 0.25 м, 1 м, 2 м, 3 м при $H = 25$ м, $Q = 0$ (рис. 2.2.2) и сжимающего усилия 0, $0.5\sqrt{D}$, $\sqrt{D}$, $1.3\sqrt{D}$ при $h = 1$ м, $H = 25$ м (рис. 2.2.3).

Анализ представленных результатов свидетельствует о существовании диапазонов изменения τ с противоположным влиянием роста глубины бассейна на амплитудные коэффициенты (рис. 2.2.1). В одном из них (меньшие периоды) R растет (T убывает), а в другом (большие периоды) R убывает (T растет) при увеличении H. Причем, коэффициент прохождения менее чувствителен к изменению глубины бассейна, чем коэффициент отражения. Прохождение волн через место налегания льдин уменьшается, а отражение увеличивается с ростом толщины льда (рис. 2.2.2).

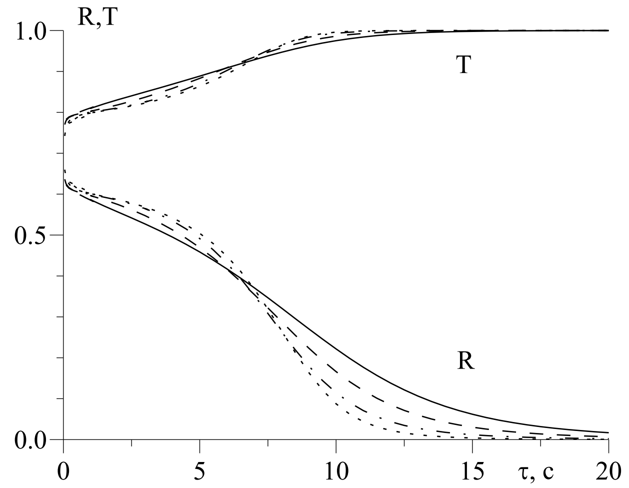

Рис. 2.2.1

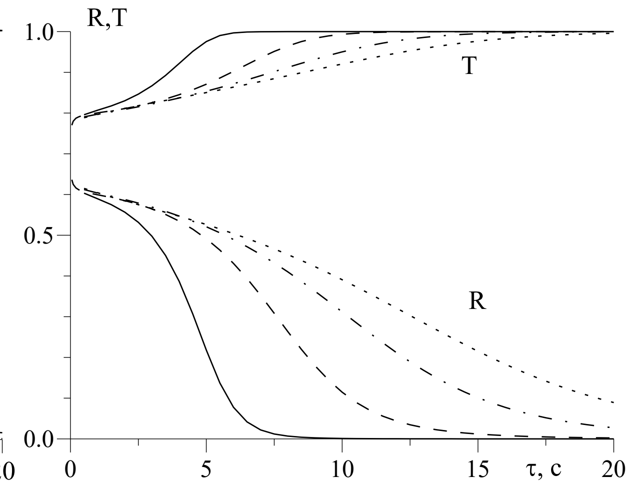

Рис. 2.2.2

Ледовое сжатие вносит не только количественные, но и качественные изменения в распределения амплитудных коэффициентов по периоду набегающей волны (рис. 2.2.3). В условиях сжатия нарушается монотонность функции $R(\tau)$, $T(\tau)$. На графиках в области средних периодов проявляются точки локальных экстремумов. Один из них соответствует верхней границе интервала периодов, в котором сжатие усиливает эффект прохождения волн через место наползания льдин друг на друга. С увеличением ледового сжатия период максимального (практически полного) прохождения смещается в сторону меньших значений. Другой экстремум характеризует обусловленное сжатием усиление отражательной способности в расширяемом с увеличением Q интервала периодов.

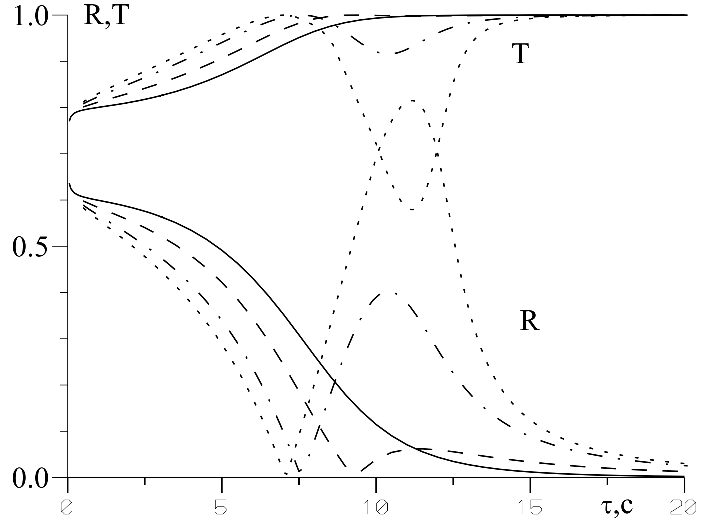

Рис. 2.2.3

Отметим, что оценка отражательной и пропускной способностей разлома без учета краевых быстро затухающих с расстоянием волн может привести к значительным погрешностям, особенно ярко проявляющимся в занижении коэффициента отражения и завышении коэффициента прохождения для набегающих волн малых и средних периодов. Это иллюстрируют графики, приведенные на рис. 2.2.4 для $H = 25$ м и $h = 1$ м. Сплошные и штриховые линии отвечают соответственно исключению из рассмотрения и учету быстрозатухающих краевых мод.

Пример распределений амплитудных коэффициентов $R(\tau)$ и $T(\tau)$ при налегании двух льдин различной толщины дан на рис. 2.2.5. Здесь штриховые линии соответствуют условиям (I) прохождения волн через разлом из области, покрытой тонким льдом в область, покрытую более толстым льдом ($h_1 = 1$ м, $h_2 = 2$ м), штрихпунктирные – условиям (II), когда $h_1 > h_2$ ($h_1 = 2$ м, $h_2 = 1$ м), а сплошные – $h_1 = h_2 = 1$ м; глубина бассейна $H = 25$ м. В случае I коэффициент отражения R меньше, чем в случае одинаковых толщин $h_{1,2} = h_1$ и больше, чем при $h_{1,2} = h_2$. Коэффициент прохождения T при этом становится значительно меньше, чем в рассматриваемых ранее случаях одинаковых толщин. Одной из причин уменьшения T является увеличение длины изгибно–гравитационной волны, прошедшей в область моря с более толстым льдом. В случае II напротив, длина прошедшей волны становится меньше длины падающей, что приводит к существенному превышению единицы коэффициентом прохождения T на малых и средних периодах. Кроме того, при фиксированных толщинах тонкой и толстой льдин, коэффициент отражения практически не зависит от того, с какой стороны набегает изгибно–гравитационная волна на линию их контакта.

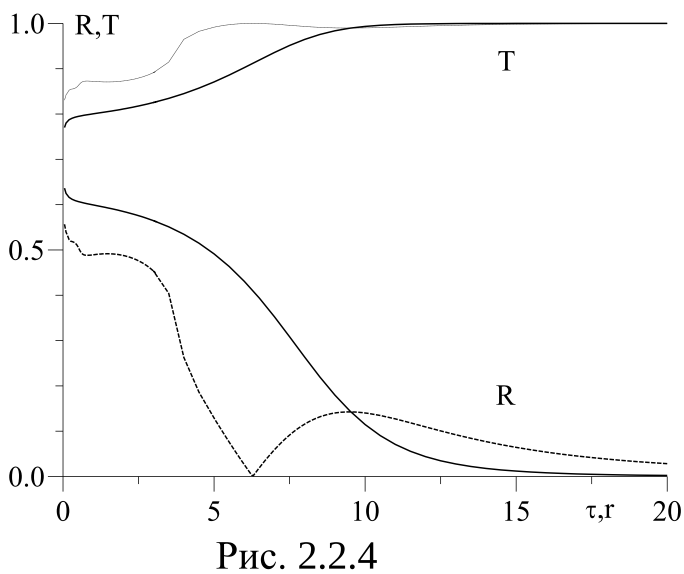

Рис. 2.2.4

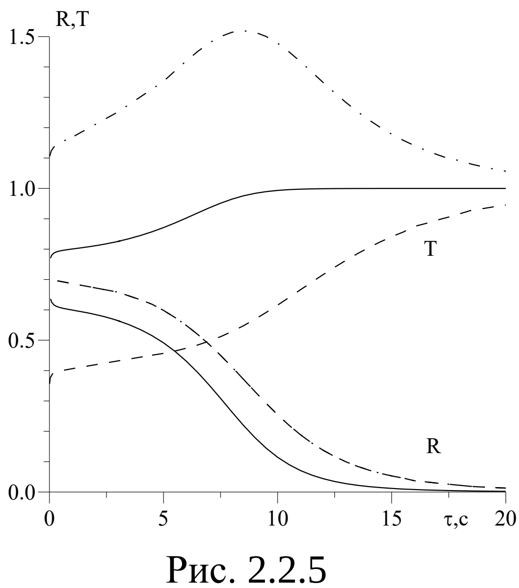

Рис. 2.2.5

2.3. Зависимость характеристик волновых возмущений от вида гранично–контактных условий на разломе льда

Проведем теперь сопоставление результатов, соответствующих выполнению условий налегания льдин одной на другую (2.2.1), с полученными для условий свободного края (2.1.5), моделирующих трещину в ледовом покрове.

Распределение амплитудных коэффициентов по τ при $H = 25$ м и $h = 1$ м даны для $Q = 0$ на рис. 2.3.1 *а*, и для $Q = 1.3Q_0$ на рис. 2.3.1 б. Штриховые и сплошные линии соответствуют условиям (2.1.5) и (2.2.1). Сопоставление графиков показывает, что волны малых периодов эффективнее проходят через место налегания льдин одной на другую, чем через трещину между ними. Однако, на интервале средних периодов имеет место обратное явление. Кроме того, при отсутствии сжатия выполнение условий налегания льдин исключает возможность полного прохождения волны среднего периода, существующей в условиях трещины. Полное прохождение таких волн возможно через место налегания льдин, но только в условиях ледового сжатия. Для трещины в этом случае практически полное прохождение волн наблюдается на двух различных периодах из области средних значений. На периодах, превышающих период полного прохождения, выполнение условий налегания льдин приводит к усилению отражения и ослаблению прохождения волн по сравнению со случаем их распространения через трещину.

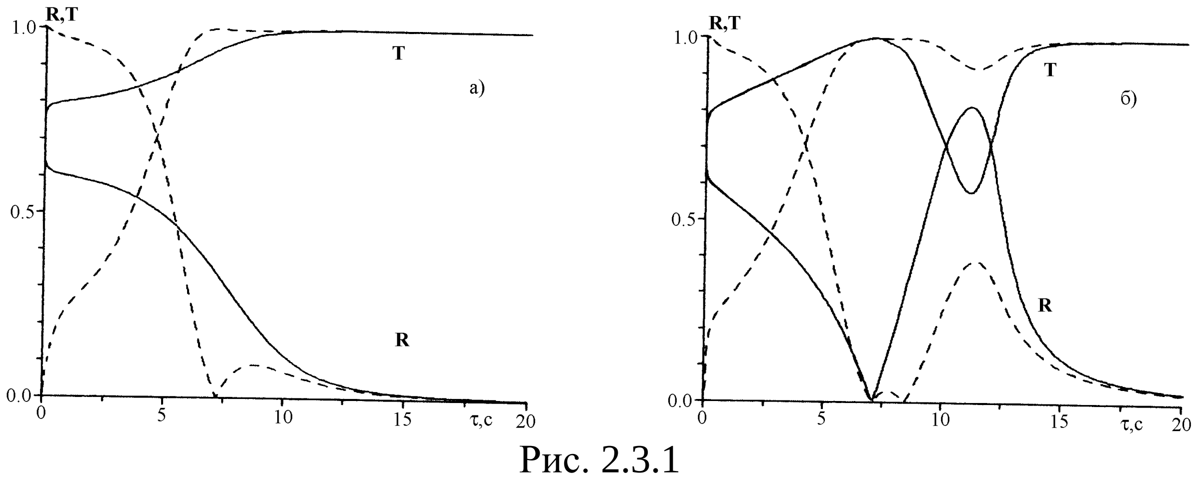

Рис. 2.3.1

Распределение амплитуды вертикального смещения льдин на кромке справа от трещины ($x = +0$) и в месте их налегания друг на друга ($x = 0$) по периоду набегающей волны, приведены соответственно на рис. 2.3.2 *а* и рис. 2.3.2 *б* линиями с номером 1. Из них сплошная, штриховая и штрихпунктирная отвечают значениям глубины бассейна и толщины льда, равным $H = 75$ м, $h = 1$ м; $H = 75$ м, $h = 5$ м; $H = 10$ м,

$h = 1$ м. Здесь и далее амплитуда набегающей волны принималась равной 0.1 м. Аналогичные распределения модуля изгиба льда на удалении 400 м от линии контакта льдин, даны там же кривыми с номером 2.

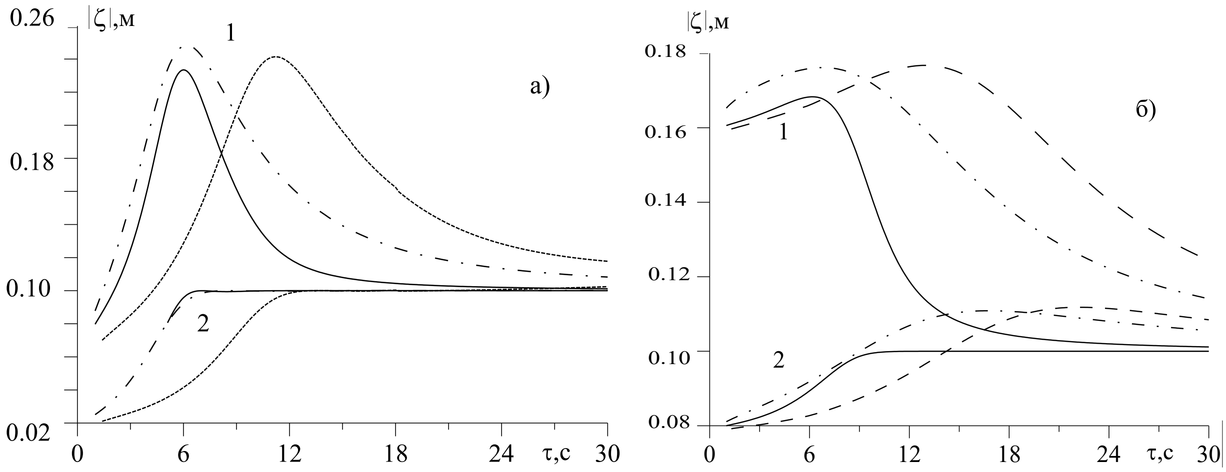

Рис.2.3.2

Видно, что в условиях трещины и налегания льдин набегающие волны одинаковой амплитуды, в зависимости от их периода, вызывают разные по величине вертикальные смещения как вдоль линии $x = 0$, так и на удалении от нее. Величина периода (τ_*) максимального отклика льда слабо зависит от глубины бассейна и определяется главным образом характеристиками ледяных пластин. С ростом толщины льда значение τ_* увеличивается. Вблизи трещины ($x = +0$) и места налегания льдин при одинаковых значениях исходных параметров величины τ_* близки между собой. Однако, для условий трещины максимум функции $|\zeta(\tau)|$ выражен ярче, а величины модулей вертикальных смещений льда и скорости горизонтальных волновых течений справа от трещины существенно превышают модуль смещения льдин на линии их налегания и скорость течения под ней.

Интервал периодов набегающих волн, вызывающих при одинаковой амплитуде падения близкое к максимуму вертикальной смещения льда для условий (2.2.1) больше, чем для (2.1.5). И в одном, и в другом случае он расширяется с уменьшением H (увеличением h).

Следует отметить, что рост h приводит к значительному увеличению $|\zeta(\tau)|$ на больших и средних периодах. На малых периодах $|\zeta(\tau)|$ убывает с ростом h, причем наиболее существенно для условий трещины.

С удалением от линии $x = 0$ величина τ_* смещается в сторону больших периодов. Изменение величины τ_* с удалением от кромки льда

($x > 0$) в условиях трещины менее значительны, чем с удалением от линии контакта при налегании льдин.

Характер распределений модулей вертикального смещения льда $|\zeta|$ и горизонтальной скорости волновых течений $|u|$ под ним по расстоянию от трещины, иллюстрируют графики на рис. 2.3.3. Сплошные, штриховые и штрихпунктирные линии на рис. 2.3.3 *а, б* отвечают соответственно значениям толщины льда $h = 0.5$ м, 1 м, 3 м при $H = 10$ м, а на рис. 2.3.3 *в, г* – значениям $h = 1$ м, 2 м, 5 м при $H = 75$ м. Период набегающей волны равен 5 секундам.

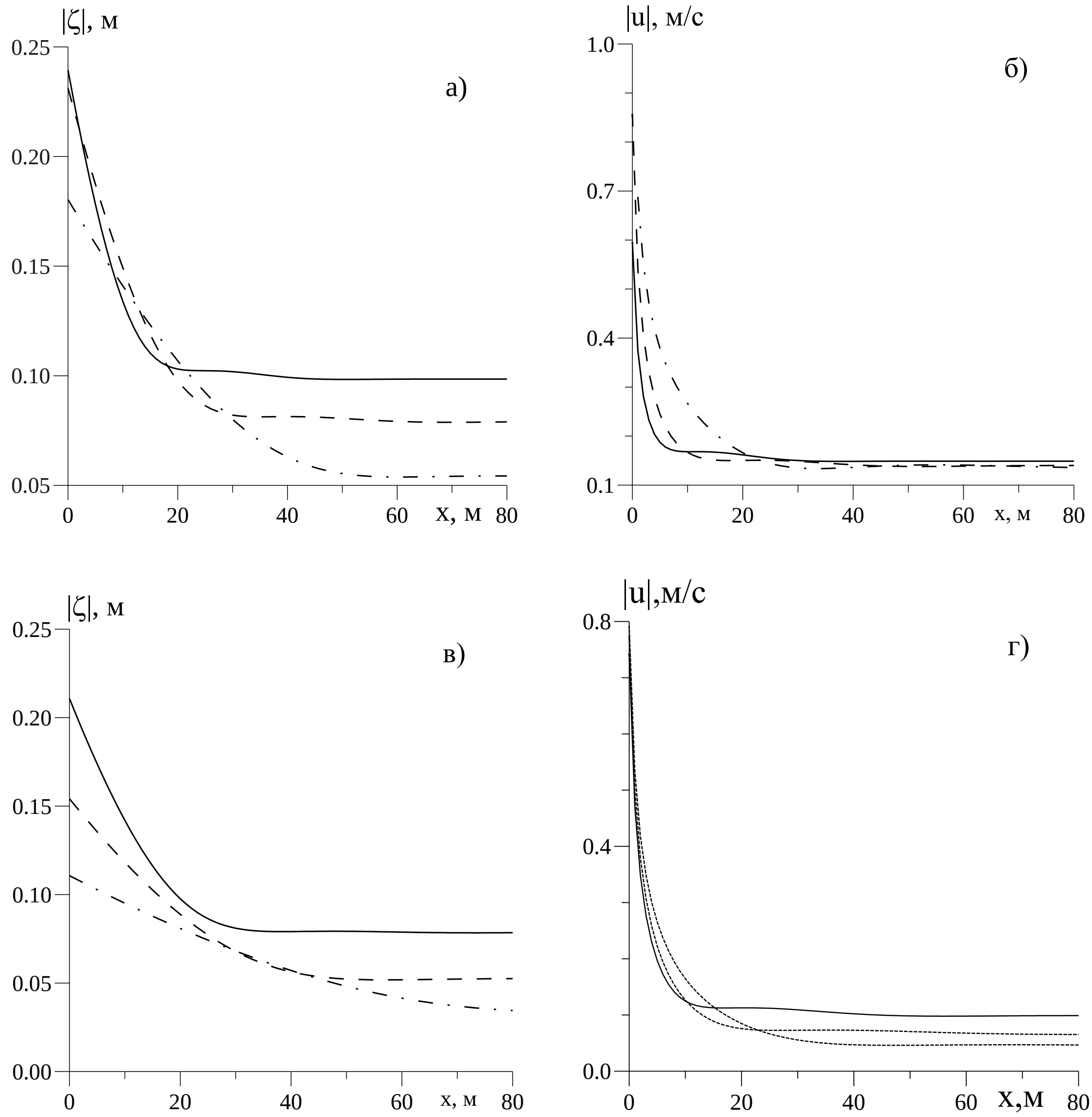

Рис. 2.3.3

Аналогичные распределения $|\zeta|$ и $|u|$ по расстоянию от линии контакта льдин, но в условиях налегания их одной на другую даны на рис. 2.3.4. Видно, что максимально возможные амплитуды вертикальных смещений реализуются непосредственно на разломе, достаточно быстро уменьшаясь с удалением от него.

Качественно такое же поведение модулей горизонтальной скорости волновых течений. Однако, при условиях налегания льдин горизонтальные скорости на некотором удалении от линии контакта могут быть сопоставимы, а иногда (при больших периодах набегающих волн) и больше, чем под ней. Таким образом, можно указать на существование примыкающей к линии контакта областей зоны наибольших изменений волновых характеристик генерируемых возмущений. Ширина зоны (L) зависит от параметров набегающей волны, глубины бассейна и ледовых условий. При фиксированных значениях периода волны и глубины бассейна функция $L(h)$ имеет максимум. При фиксированных ледовых условиях ширина L зоны интенсивных изменений $|\zeta(x)|$ и $|u(x)|$, как функция периода набегающей волны, так же имеет максимум.

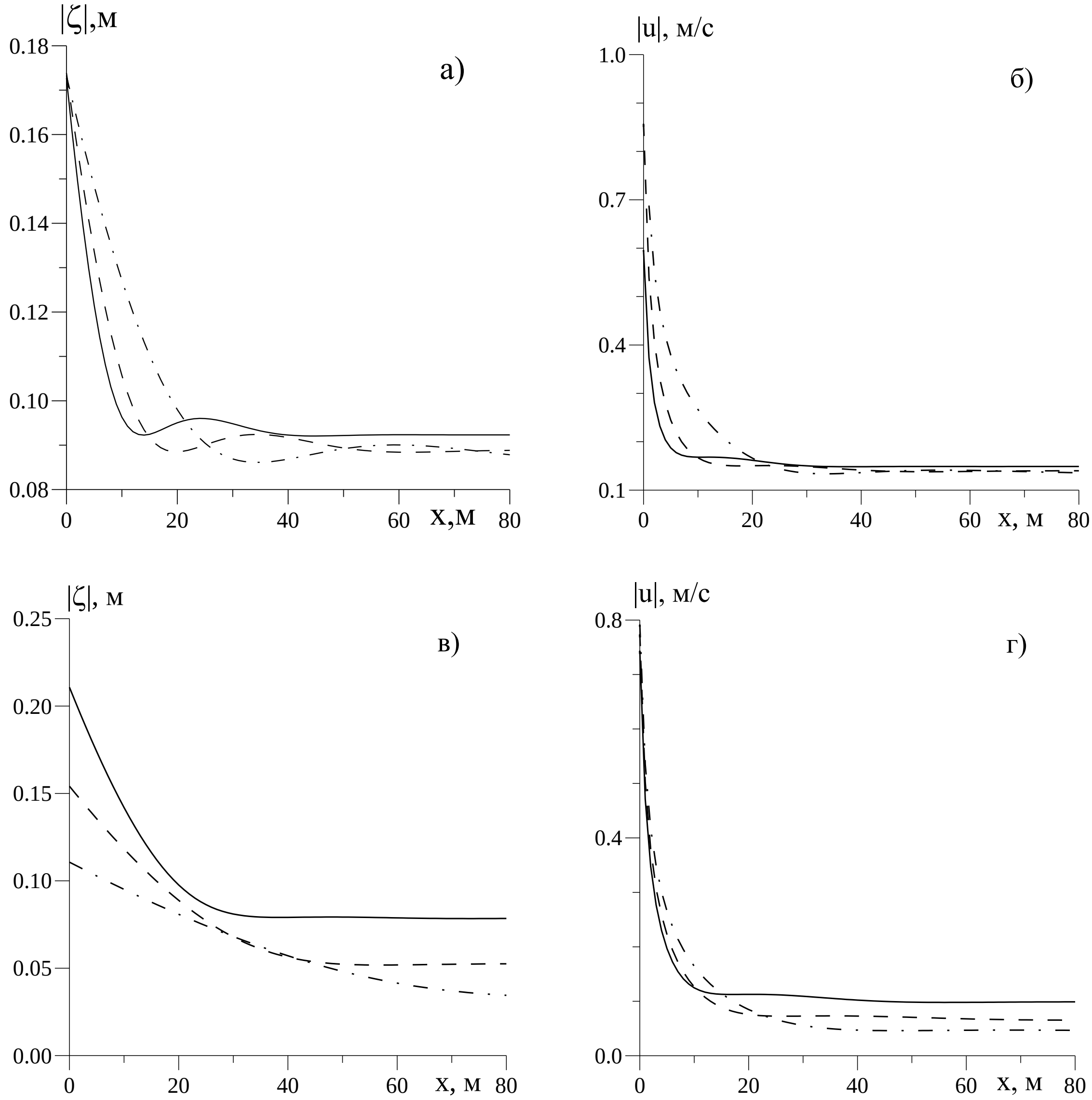

Рис. 2.3.4

В качестве иллюстрации зависимости амплитудных характеристик возмущений, генерируемых в области $x \geq 0$, от вида гранично-контактных условий, на рис. 2.3.5 штриховыми и сплошными линиями даны распределения $|\zeta(x)|$ для условий (2.1.5) и (2.2.1) соответственно. Здесь рис. 2.3.5 *а, б, в, г* отвечают периоду набегающих волн τ = 3 с, 5 с, 7 с, 10 с при $H = 75$ м, $h = 1$ м. Кроме того, при этих же H и h, в табл 2.3.1 приведены некоторые количественные характеристики на линии $x = 0$, $z = H$ для условий (2.1.5) и (2.2.1). Символами τ, λ, $u_{пад}$, $|\zeta_R|$, $|\zeta_T|$, $|\zeta_{-0}|$, $|\zeta_{+0}|$, $|\zeta_0|$, $|u_0|$ и L обозначены соответственно период и длина набегающей волны, скорость ее горизонтальных волновых течений, амплитуды отраженной и прошедшей прогрессивных волн, модули вертикальных смещения льдин слева и справа от трещины и на линии контакта налегающих льдин, абсолютные скорости волновых течений под разломом льда и ширина прикромочной полосы (справа от линии $x = 0$), вне которой амплитуды волновых возмущений меняются не более чем на 5%.

Таблица 2.3.1.

Период τ, с	Длина λ, м	Гориз. скор. $u_{пад}$, см/с	$\lvert\zeta_R\rvert$ см	$\lvert\zeta_{-0}\rvert$ см	$\lvert\zeta_{+0}\rvert$ см	$\lvert\zeta_T\rvert$ см	L,м	$\lvert u_0\rvert$ см/с
3	58.79	20.94	9.09 5.68	40.92 16.36	12.60	4.16 8.23	22 13	96.69 21.52
5	78.18	12.57	6.15 5.04	39.29 16.71	21.08	7.88 8.63	28 16	73.78 12.79
7	101.66	8.98	0.09 3.70	21.82 16.72	21.63	9.99 9.29	32 19	35.58 9.06
10	160.04	6.32	0.63 0.87	13.86 13.79	14.16	9.98 9.96	21 16	9.78 6.32
15	314.45	4.63	0.02 0.03	10.79 10.80	10.80	9.99 9.99	5 5	4.78 4.63

Сравнительный анализ показывает, что на малых периодах амплитуды вертикальных смещений при всех $x \geq 0$ в условиях (2.2.1) могут быть больше, чем в условиях (2.1.5). Это же касается и амплитуд горизонтальных скоростей, за исключением небольшой окрестности вблизи разлома, где $|u|$ под трещиной всегда больше, чем под местом налегания льдин. С увеличением периода амплитуды возмущений растет, достигая максимума, причем при условиях (2.1.5) он больше, чем при (2.2.1). Дальнейший рост τ приводит к уменьшению различий в прохождении волн через неоднородности типа (2.1.5), (2.2.1), а достаточно длинные волны практически не ощущают разлома в ледяном поле.

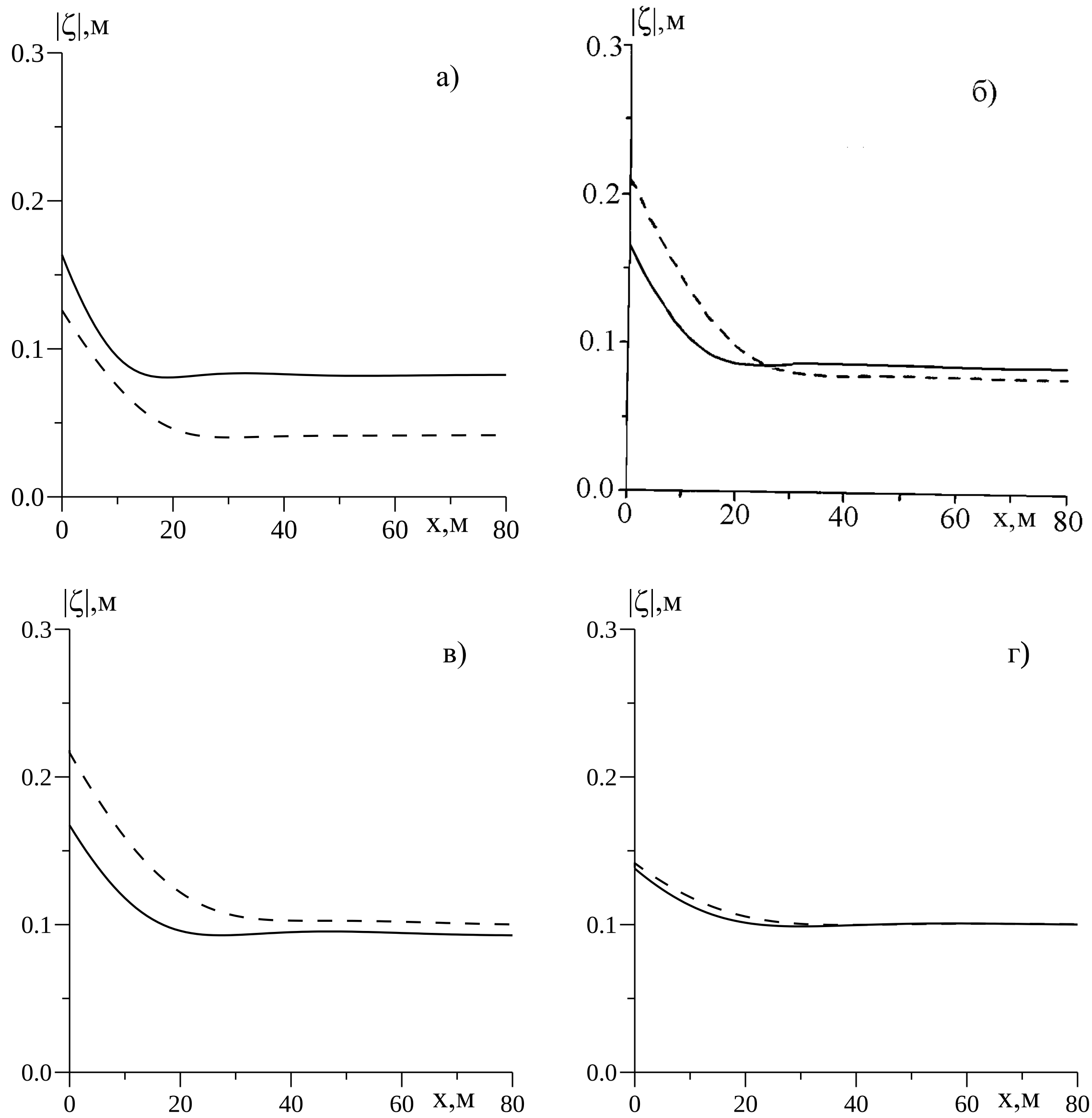

Рис. 2.3.5

ГЛАВА 3. ОЦЕНКА ЭКРАНИРУЮЩИХ СВОЙСТВ КРОМКИ ЛЬДА В СЕВЕРО–ЗАПАДНОЙ ЧАСТИ ЧЕРНОГО МОРЯ

3.1. Особенности ледового режима и ветрового волнения

В северо-западной части Черного моря льды образуются ежегодно [9, 45, 52, 53, 54, 61, 72]. Ледяной покров, устанавливающийся на Черном море, отличается большой межгодовой изменчивостью. В очень мягкие зимы лед появляется только в прибрежных районах и сохраняется в течение нескольких дней. Однако, в умеренные и суровые зимы лед образуется на значительных территориях моря. Так, в одну из самых суровых за последние годы зиму 1953–54 г. он наблюдался в прибрежной полосе от Днепровского лимана до пролива Босфор и в районе, примыкающем к Керченскому проливу от Феодосии до Новороссийска. Керченский пролив и северо-западная часть Черного моря несколько месяцев были покрыты ледяным покровом толщиной более 50 см. Припай распространялся южнее Констанции, а плавучий лед в виде небольших льдин и каши дрейфовал вдоль всего западного побережья до Босфора, даже попадал в Мраморное море [45, 72].

Экстремальные или близкие к ним ледовые условия в Черном море – явление не редкое [72, 110]. Так, определяя степень суровости зимы по классификации А.А. Теодоровича и А.И. Сиротниной, (в зависимости от сумм средних суточных отрицательных температур воздуха за период с октября по апрель по наблюдениям на станциях Одесса, Очаков, Хорлы: более 400° – суровые, 200° – 400° – умеренные и мягкие – менее 200°) за период с 1925 по 1985 гг. суровые ледовые условия наблюдались в 14 зимах, т.е. в среднем один раз в 4–5 лет.

Ледовый режим Черного моря зависит от изменчивости множества факторов, главенствующими из которых являются крупномасштабные атмосферные процессы, теплозапас моря в период, предшествующий льдообразованию и адвекция тепла со стороны открытого моря. Начало льдообразования, толщина льда, продолжительность ледового сезона, сплоченность льда и положение кромки зависит также от физико–географических условий района: широты места, изрезанности береговой линии, глубины моря, выноса речных вод, солености и др. Суровые и очень ледовые зимы возникают под влиянием активного антициклогенеза над Западной Европой в течение предзимья и зим, вследствие чего блокируется западный перенос (по меньшей мере, в нижней тропосфере), связанный с адвекцией тепла с океана, и становятся господствующими потоки северных направлений, переносящие в район Черного моря холодный и сухой воздух из северных областей [72]. При ослаблении меридионального переноса, вызывающего адвекцию холода из высоких широт, и усилении зональной циркуляции, на Черное море распространяется адвекция тепла и влаги с океана и Средиземного моря, создавая аномально теплые зимние условия.

Появление льда в Черном море происходит при понижении температуры воды до температуры замерзания, значения которой различны для разных станций [52, 61, 72]. В Скадовске, Стерегущем, Хорлах, Приморском лед чаще всего появляется при температуре воды от – 0.8° до – 1.0°С. Однако, были случаи, когда появление льда отмечалось уже при 0°С. В Евпатории, в районе Тендровского маяка, Феодосии лед появляется при понижении температуры воды от – 1.0° до – 1.1°С. При температуре воды от –0.6° до –0.9° С появляется лед в Одессе. Наиболее высокая температура замерзания отмечается в Очакове (–0.1° –0.2°С), где низкие значения солености. В Черноморском лед начинает образовываться при температуре воды –0.7°С.

Первое появление льда в северо-западной части моря в основном происходит в декабре – начале января [45, 72]. Вначале лед образуется в бухтах, заливах и лиманах. В открытых районах моря первый лед может быть, как приносным, что особенно характерно для районов Одессы и Тендры, когда ветер северного и северо-восточного направления приносит лед из восточных районов. В Феодосии первый лед может быть приносным из Керченского пролива, у Стерегущего – из Джарылгачского залива. В Вилково первый лед чаще всего связан с ледоходом на реке Дунай. Большая изрезанность береговой линии и малые глубины способствуют раннему и быстрому образованию припая. Дата первого появления припая, так же, как и дата льдообразования, отличается большой неустойчивостью. Первое появление припая в разные годы на различных станциях отличается в течение всего зимнего сезона и может наблюдаться как в последних числах ноября (Очаков, 1931 г., Скадовск, 1931, 1933 гг.), так и в середине февраля (Одесса, 1924 г.) [72, 111]. Полное замерзание открытых районов северо-западной части моря происходит лишь в очень суровые зимы и в большинстве пунктов наблюдается не каждый год. Только в некоторых закрытых районах оно происходит ежегодно.

Начало взлома или первой подвижки припая наблюдается обычно в феврале – начале марта. Раньше всего весеннее вскрытие происходит у входа в Днепровский лиман и в районе Одессы, чему способствует подток теплых вод и действие южных ветров. Затем вскрывается лед в остальных пунктах Днепровского лимана и Джарылгачской бухты. Позже всего происходит вскрытие в закрытых бухтах и лиманах. Разрушение припая в северо-западной части моря происходит быстро (в течение нескольких дней) и дата окончательного разрушения припая происходит на конец февраля – начало марта. Чаще всего окончательное очищение моря наблюдается в марте. Открытые района моря очищаются в конце февраля. Позже всех очищается Днепровский лиман, т.к. здесь все время выносится лед из Южного буга. К концу марта северо-западная часть моря обычно полностью очищается от льда. Наиболее позднее окончательное очищение отмечалось на постах Очаков и Святотроицкий маяк (19 апреля 1929 г.) [45].

Одной из основных характеристик ледового режима моря является ледовитость, под которой понимают площадь суммарного распространения ледяного покрова во всех замерзающих районах моря. Необходимые условия льдообразования на Черном море могут возникать к середине зимы на площади до 20 тыс. км^2 [72], однако даже в самые суровые зимы максимальная ледовитость моря не превышала 5 %. Обычно же в середине зимы величина ледовитости составляет 0.5–1.5 % площади моря. Нормальный средний многолетний ход ледовитости Черного моря характеризуется более или менее равномерным ростом ледяного покрова в период его развития (с декабря по февраль), когда он ежемесячно возрастает примерно на одну треть его максимальной величины. Максимального развития ледяной покров достигает в первой половине февраля. Период его разрушения в Черном море меньше, чем развития. Он обычно составляет около двух месяцев – с середины февраля до начала апреля. В течение первого месяца (с февраля по март) ледовитость в среднем уменьшается на 50 %, а в начале апреля лед исчезает полностью. В течение ледового сезона ледовитость Черного моря испытывает очень резкие колебания. Так, например, зимой 1971–72 г. в период 18–26 января ледовитость моря возросла с 9.5 до 15.5 тыс.км^2. Зимой 1953-54 г. в течение двух недель (с 9 по 26 января) ледовитость увеличивалась почти в четыре раза (с 4 до 16 тыс. км^2). Подобные резкие колебания ледовитости, обусловленные соответствующей изменчивостью погодных условий над морем, являются характерной чертой ледового режима Черного моря. Ледовитость северо-западной части Черного моря хорошо согласуется с температурой воздуха над этим районом. Высокий коэффициент корреляции между среднесуточной отрицательной температурой воздуха и ледовитостью обусловлен относительно малой площадью льдообразования, чаще всего находящейся в пределах одной воздушной массы с одинаковыми температурными условиями. Однако, несмотря на значительные кратковременные (преимущественно 3–7 дневные) изменения ледовитости, ее среднемесячные аномалии сохраняются во времени довольно устойчиво и продолжительно.

Положение внешней кромки льда, характеризующее его распределение, представляет самостоятельный интерес. В северо-западной части Черного моря развитие и распространение льда происходит в направлении с севера на юг. Кромки льда в лиманах и бухтах имеют сложные очертания, особенно в начале и конце ледового сезона. В открытом море они более стабильны и ориентированы преимущественно по широте. Очевидно, что кромка льда, как и ледовитость, испытывает в течение ледового сезона изменения двоякого рода: кратковременные, согласующиеся со сменой естественных синоптических периодов над морем, и более длительные, обусловленные сезонными и межгодовыми особенностями атмосферных процессов. Нормальные (средние многолетние) изменения кромок от месяца к месяцу в абсолютном выражении весьма невелики. В декабре ледяной покров образуется и развивается в пределах лиманов и бухт. В январе кромка льда располагается в открытом море в двух милях от берега. К середине февраля кромка льда смещается к югу еще на 3–5 миль. Наибольшие изменения кромок наблюдаются от февраля к марту (в период разрушения ледяного покрова и отступания кромки к берегу) и составляют 5–8 миль в среднем. Максимальное распространение льда и положение кромки [4] представлены на рис. 3.1.1. Известно, что положение кромки льда тесно связана с ледовитостью. Ледовитость Черного моря и внешняя кромка льда испытывают большие колебания от года к году. Возможны случаи, когда ледовитость одной зимы (в целом) может в 10 и более раз превышать ледовитость другой. Так, об амплитуде колебаний можно судить по двум зимам: 1953–54 г. – (очень суровая и ледовитая), когда ледовитость моря в феврале достигла 16 тыс.км^2, а внешняя кромка в меридиональной полосе 30°40′ – 41°40′ удалилась от северного берега на 35 миль, и зиме 1954–55 г. – очень мягкой и малоледной, когда максимальное удаление кромки от берега за весь ледовый сезон не превышало 0.5 миль, а наибольшая ледовитость в январе составляла 1 тыс. км^2 [72].

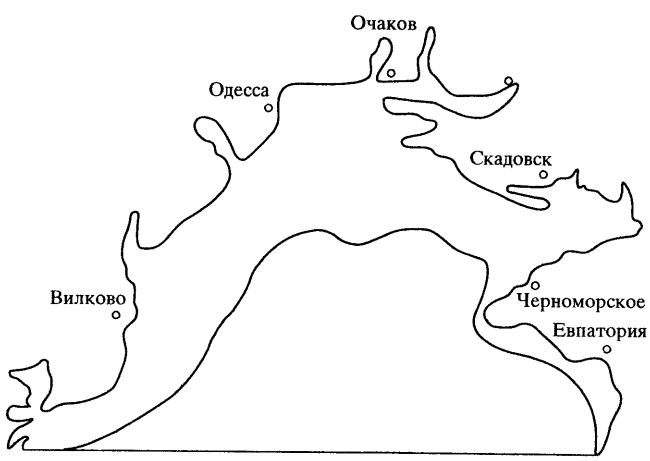

Рис.3.1.1

Колебание ледовитости Черного моря не обнаруживает заметной хронологической последовательности зим различной суровости. Суровые зимы, как и мягкие, могут продолжаться по несколько лет подряд. Имеющиеся многолетние ряды по суровости зим и ледовитости показывают, что вероятность повторения мягких зим (в течение двух лет и более) значительно выше, чем вероятность повторения суровых зим. Обеспеченность очень суровых и ледовитых зим на Черном море (с ледовитостью выше 7 тыс. км^2), как и обеспеченность экстремально мягких и малоледных зим (с ледовитостью менее 1 тыс. км^2) составляет около 20%. Иногда удобно оценивать межгодовые изменения ледовитости в аномалиях, характеризующих обеспеченность абсолютных величин положительных и отрицательных аномалий вместе взятых. Так, аномалия ± 2 тыс. км^2 (половина среднего многолетнего значения) обеспечена на 80% зим. Следует указать на одну интересную особенность сезонного хода ледовитости: максимальная за зиму площадь распространения льда больше всего обеспечена в феврале. Февралю же свойственны наибольшие отклонения от средних значений. Так, например, аномалия $\pm$ 3 тыс. км^2 (половина средне-многолетнего февральского значения ледовитости) в феврале обеспечена в 80% зим, тогда как в январе – примерно в 40% зим [52, 72]. Подобно ледовитости, наибольшая ширина пояса льдов также преобладает в феврале. Распределение соответствующих аномалий подчиняется такой же закономерности. Так, аномалия 50%-ой обеспеченности (в одноградусной меридиональной полосе 30°40′ – 31°40′ в.д.) в январе равна четырем, а в феврале – шести милям. Следует заметить, что эти аномалии по абсолютной величине значительно превышают средние значения самых ледовых поясов. Это обстоятельство лишний раз свидетельствует о большой межгодовой изменчивости кромок в северо-западной части Черного моря.

Важными характеристиками ледового покрова являются также толщина льда и число дней со льдом. Первая из них существенно уточняет данные по ледовитости, вторая позволяет судить о продолжительности существования ледяного покрова. Продолжительность ледового сезона колеблется в очень широких пределах в зависимости от района моря и типа зимы. Так, в умеренные зимы возможны прекращения самостоятельного плавания судов на срок от двух недель до одного месяца, преимущественно в феврале. Для суровых зим общая продолжительность существования льда в течение зимы составляет 3.5–4 месяца. В прибрежной зоне примерно с середины декабря до середины марта лед наблюдается почти ежедневно. В особо суровые зимы в глубине Каркинитского залива продолжительность ледового периода составляла 130 суток [52, 110]. В такие зимы ледяной покров достигает в январе – феврале толщины 40–60 см. Вследствие этого приостанавливается самостоятельное плавание транспортных судов и становятся необходимыми ледокольные проводки. Толщина льда в открытом море значительно меньше, чем у берега. Согласно эпизодическим наблюдениям с плавающих судов, наблюдающаяся толщина плавучих льдов на площади моря к северу от параллели 46° с.ш. равна 15–25 см, т.е. 40–50% толщины прибрежного припая. Число дней со льдом в открытом море также меньше, чем у берега. В умеренные или нормальные зимы ледяной покров в прибрежной зоне характеризуется следующими наиболее вероятными значениями толщины и числа дней со льдом. В Одессе толщина льда составляет 15–25 см., число дней со льдом – 30–40, в Очакове и Херсоне соответственно 25–35 см. и 65–75 дней. Преобладающая толщина льда в открытом море в это время 5–15 см.

В Черном море имеет место заметное сезонная и пространственное изменение характеристик ветрового волнения. Преобладающими ветрами в зимний период для рассматриваемого региона являются ветры северного и северо–восточного направлений [39, 124]. Их средняя продолжительность составляет около 15 часов, однако такие ветры могут иметь непрерывную продолжительность до 10 суток. Следует отметить, что повторяемость и продолжительность ветров других направлений также достаточно велики, что связано с местными орографическими условиями района [45, 124]. Повторяемость высот волн и скоростей ветра по направлениям даны в табл. 3.1.1.

Таблица 3.1.1

Сезон	Скорость ветра, м./с	Направление								Высота волны				
		С	СВ	В	ЮВ	Ю	ЮЗ	З	СЗ	<2	2-4	4-6	6-8	>8
Зима	<6	7	6	5	3	4	3	4	7	30	10	+	+	+
	6-12	7	11	4	3	4	5	3	7	33	10	1	+	+
	12-16	3	4	1	+	1	1	2	1	7	5	1	+	+
	>16	+	1	+	+	+	+	+	+	+	1	1	1	+

Зимнему периоду соответствуют максимально возможные значения скорости ветра. Так, обеспеченность ветров со скоростью ≥ 14 м/с – семь процентов, а их повторяемость порядка четырех процентов. Повторяемость ветра ≥ 20 м/с составляет 0.3 – 0.5 %. Наиболее характерные скорости ветра зимой в данном регионе заключены в пределах 4–10 м/с. Их обеспеченность колеблется от 40 до 80 %, а повторяемость составляет около 20 %. Значительные размеры моря и большие глубины способствуют развитию крупных волн [125, 59], высоты которых могут превышать 11 м. Однако, повторяемость сильного волнения невелика: зимой для волн ≥ 6 м она менее 1 %, а 90 % волн имеют высоту ниже 3 м.

Как правило, периоды волн на Черном море – не более 9 сек, наиболее повторяемыми являются волны с периодами 3–5 сек (48%). Их обеспеченность ~ 75 %. Режим волнения в прибрежной зоне очень изменчив и в значительной степени зависит от местных особенностей региона. Так, зимой у северо-западного, а иногда и у западного побережья развитию и распространению волнения препятствуют льды.

В суровые зимы, когда ледяной покров получает большое распространение по площади моря и увеличивается по толщине, условия навигации значительно усложняются. Кроме того, наличие ледяного покрова существенно изменяет характер поверхностного волнения, воздействуя, тем самым, на обменные, гидрохимические и гидрофизические процессы в толще воды под ледяным полем. Регулярные и все возрастающие зимние плавания транспортных судов в Одессу, Николаев, Херсон и другие порты на северо–западе Черного моря, а также освоение ресурсов шельфовой части моря, природоохранные задачи требуют изучения и учета особенностей ледяного покрова, его динамику, сезонных и межгодовых изменений. В связи с этим, практический интерес представляет изучение динамического состояния северо-западной части бассейна Черного моря с учетом особенностей, обусловленных характером ледового режима в зимний период.

3.2. Амплитудные коэффициенты отражения и прохождения волн в районах, прилегающих к северо-западному побережью

Пусть часть акватории моря, прилегающая к берегу, покрыта сплошным упругим льдом толщиной h. На кромку льда из открытой части моря набегает плоская прогрессивная волна, длина которой много меньше расстояния от кромки до берега. Математическая постановка задачи о влиянии кромки на волновые возмущения такая же, как и приведенная в п.1.1 главы 1. Численная реализация задачи осуществлялась для экстремально суровых ледовых условий в северо–западной части Черного моря. Параметры ледового режима для районов вблизи пунктов Вилково, Одесса, Очаков, Скадовск, Черноморское, Евпатория (районы 1–6) приведены в табл. 3.2.1. Модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность льда полагались равными $8 \cdot 10^8$ Н/м^2, 0.33, 870 кг/м^3 при плотности воды 1025 кг/м^3.

Полученные в результате расчетов распределение амплитудных коэффициентов $R = \dfrac{|R^*|}{I}$ и прохождения $N = \dfrac{k\,\mathrm{sh}(kH)}{r\,\mathrm{sh}(rH)} \cdot \dfrac{|T^*|}{I}$ по периоду набегающей волны τ изображены графически на рис. 3.2.1 *а*, 3.2.2 *а*. Пунктирные, штриховые и сплошные линии на рис. 3.2.1 отвечают районам вблизи Вулково, Одессы, Очакова, а на рис. 3.2.2 – вблизи Скадовска, Черноморского, Евпатории. Для этих же районов соответствующими линиями даны (рис. 3.2.1 *б*, 3.2.2 *б*) и дисперсионные зависимости $\lambda(\tau)$ в ледовых условиях ($x > 0$).

Таблица 3.2.1

Ледовые условия / Районы	Максимальное удаление кромки льда от берега (миль)	Максимальная многолетняя толщина льда (м)	Глубина бассейна вблизи кромки (м)
1. Вилково	7–13	0.44	10
2. Одесса	30–35	0.40	30
3. Очаков	35	0.62	20
4. Скадовск	3.5–7	0.57	10
5. Черноморское	0.5–1	0.48	15
6. Евпатория	1	0.46	15

Анализ результатов показал, что для всех рассматриваемых районов ледяной покров будет заметно изменять поверхностное волнение, поскольку периоды волн, как правило, не превышают 9 секунд. В частности, для $\tau = 5$ сек амплитуда прошедшей в направлении берега прогрессивной волны может составлять 49.6 % (Очаков) – 67.7 % (Одесса), а отраженной от кромки льда – соответственно 21.3 % – 11.3 % амплитуды набегающей. При этом, часть волновой энергии теряется на генерацию возмущений, быстро затухающих с удалением по обе стороны от кромки. Пренебрежение затухающими возмущениями при исследовании экранирующей и пропускной способности льда может привести к существенным погрешностям. Отметим, что увеличение жесткости льда ослабляет прохождение волн через кромку, расширяя, при этом, интервал периодов колебаний, на которых ее влияние становится заметным.

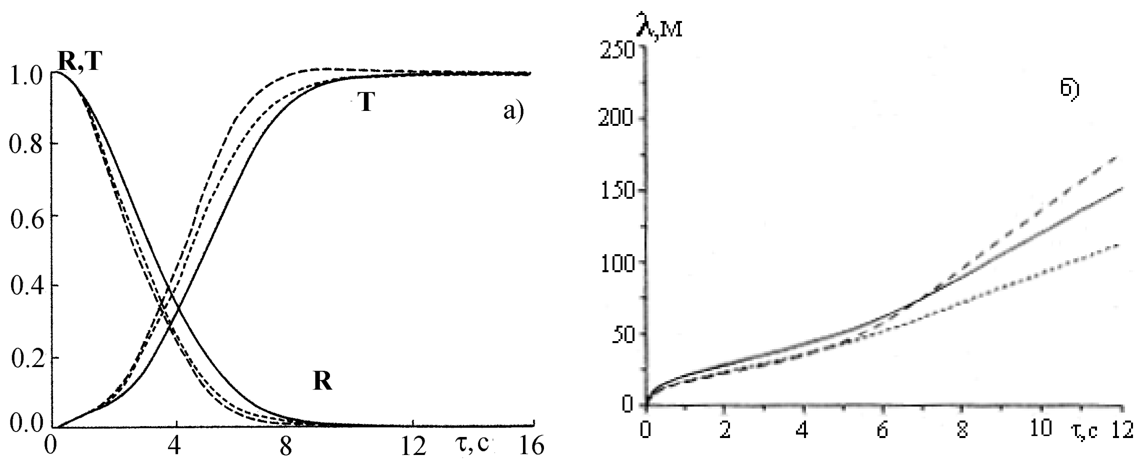

Рис.3.2.1

Наличие ледяного покрова приводит к существенным отличиям дисперсионных соотношений $\lambda(\tau)$ по разные стороны от кромки. В табл. 3.2.2 для рассматриваемых районов вынесены величины длин волн (м) на открытой воде (верхние числа) и в области моря, покрытой льдом (нижние числа) при значениях периодов набегающей волны от 2 с до 12 с. Волна, прошедшая в покрытую льдом область бассейна, может быть значительно длиннее, чем отраженная (падающая). Эти отличия, обусловленные изгибной жесткостью льда, убывают с увеличением периода колебаний. Однако, начиная с периода $\tau_0 \frac{2\pi}{\sqrt{k_0 gth(k_0 H)}}$, где k_0 – действительный корень уравнения $Dk_0^3 - \kappa gth(k_0 H) = 0$, волна в покрытой льдом области становится несколько короче падающей, что является следствием преобразования инерционных свойств льда над упругими. Значения τ_0 в районах 1–6 равны 9.54, 6.73, 8.59, 11.72, 8.22 и 8.01 секунд соответственно.

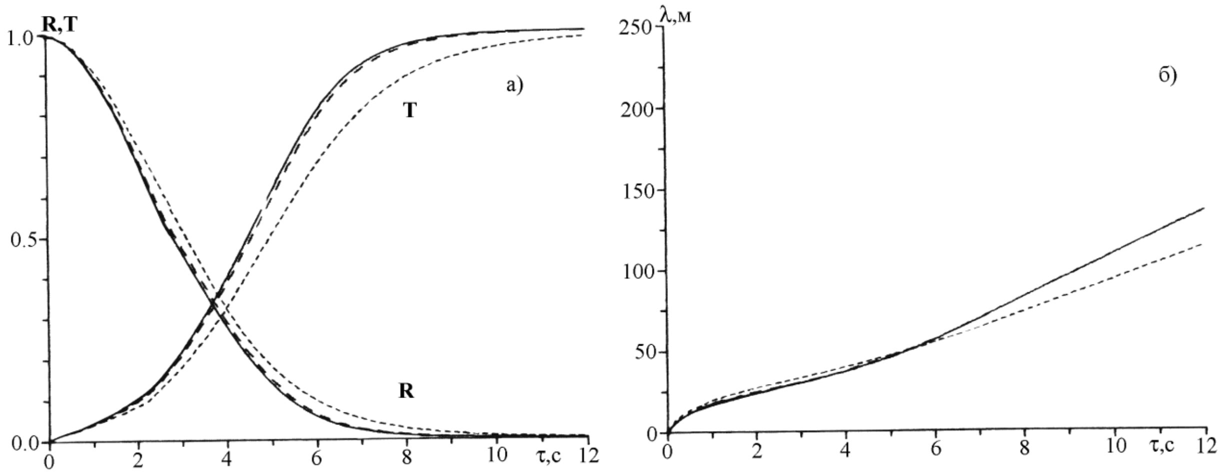

Рис. 3.2.2

Таблица 3.2.2

Период волны, с. / Районы	2	4	6	8	10	12
1. Вилково	6.25 23.50	24.68 35.58	48.41 51.61	70.90 71.49	92.37 92.28	113.30 113.02
2. Одесса	6.25 22.34	24.98 34.98	56.07 57.61	96.05 95.02	137.29 136.12	177.04 176.02
3. Очаков	6.25 28.51	24.98 42.39	55.05 61.46	88.79 89.41	121.24 120.57	152.36 151.48
4. Скадовск	6.25 27.08	24.68 39.67	48.41 54.50	70.90 72.82	92.37 92.84	113.30 113.25
5.Черноморское	6.25 24.71	24.95 37.60	53.07 56.45	81.79 81.92	109.05 108.56	135.35 134.76
6. Евпатория	6.25 24.13	24.95 36.93	53.07 56.04	81.79 81.80	109.05 108.53	135.35 134.76

3.3 Прохождение ветрового волнения в область моря, покрытую льдом

При ветровом волнении поверхность моря имеет сложную нерегулярную форму [84, 114]. Если рассматривать этот сложный колебательный процесс как результат взаимодействия множества простых (гармонических) составляющих, приписав каждой из них кинематические и динамические свойства прогрессивных волн малой амплитуды, то распределение энергии волн по частотам определяется энергетическим спектром $S(f)$, $f = 2\pi\omega$ [49, 70, 71]. Зная результат взаимодействия с кромкой льда отдельной гармонической составляющей и спектральный состав волнения на открытой воде, можно найти энергетический спектр, а затем амплитудные и частотные характеристики волнения в области, покрытой льдом.

При набегании волны единичной амплитуды для заданной частоты f найдем по модели (п. 1.1 гл. 1) амплитуду $\zeta(x, f)$ волны, прошедшей в покрытую льдом область моря. Определив теперь для каждой из компонент спектра $S(f)$ набегающих на кромку льда волн их амплитуды в области $x > 0$, получим спектр $S^*(x, f)$

$$S^*(x, f) = |\zeta(x, f)|^2 S(f).$$

На удалении x от кромки льда. Спектр горизонтальной компоненты скорости можно получить по формуле

$$S_u(\omega) = \omega^2 \left[\frac{\operatorname{ch}(kz)}{\operatorname{sh}(kH)}\right]^2 S(\omega),$$

используя известные [49, 55, 70] соотношения.

Большой интерес при исследовании динамики замерзающих морей представляет оценка прочности льда для последующего вычисления его несущей способности, определения усилий, вызывающих его ломку, торошение и т.д. Прошедшая через кромку льда волна вызывает в ледяной пластине напряжение изгиба [100, 108, 117]

$$F(x, f) = \frac{1}{2} Eh \frac{\partial^2 \zeta(x, f)}{\partial x^2}. \qquad (3.3.1)$$

Определив $\zeta(x, f)$ через потенциал скорости (1.1.14) из кинематического соотношения $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ (при $z = H$) и подставив в (3.3.1), для набегающей волны единичной амплитуды найдем

$$F(x, f) = EF_0(x, f), \quad F_0 = a(F_1 + F_2 + F_3), \quad a = -h(21k\operatorname{sh}(kH))^{-1},$$

$$F_1 = T^* k^3 e^{-ikx} \operatorname{sh}(kH),$$

$$F_2 = T_1(\alpha + i\beta)^3 e^{-(\alpha+i\beta)x} \sin[(\alpha + i\beta)H] + T_2(\alpha - i\beta)^3 e^{-(\alpha-i\beta)x} \sin[(\alpha - i\beta)H],$$

$$F_9 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n k_n^3 e^{-k_n x} \sin(k_n H),$$

где $F_{1,2,3}$ характеризуют соответственно вклады прогрессивных, прогрессивно–затухающих и краевых волн в напряжение изгиба. Так как спектральная плотность квадрата напряжения $N^*(x, f)$ связана с энергетическим спектром волн соотношением [138]

$$N^*(x, f) = \left| F_0(x, f)^2 S(f) \right|.$$

То ожидаемое напряжение, вызванное всеми частотными компонентами волнения на удалении x от кромки, можно рассчитать по формуле

$$N(x) = \left(\int_0^{\infty} N^*(x, f) df \right)^{1/2}. \tag{3.3.2}$$

Рассмотренная модель набегания волн на кромку льда реализована для ледовых условий северо-западной части Черного моря [34]. Параметры ледового режима такие же (табл.3.2.1), как в п.3.2 гл.III, т.е. отвечают условиям экстремально суровых зим. Для характеристики ветрового волнения использовались экспериментальные данные, полученные при измерениях в этом регионе моря [56, 57]. Выбранные для расчетов параметры ветровых волн в его глубоководной части даны в таблицах 3.3.1, 3.3.2. В табл. 3.3.1 представлены скорость ветра u_{10} на горизонте 10 м над уровнем моря, ее повторяемость (P_u,%) и обеспеченность (G_u,%), частота (f_m) и период (τ_m) спектрального максимума с их повторяемостью (P_f,%) и обеспеченностью (G_f,%), дисперсия (σ^2), высота ($\eta_{3\%}$) и повторяемость (P_η,%) волн 3–процентной обеспеченности, длина разгона (X_m, Км) и отношение (u_{10}/C_m) скорости ветра к фазовой скорости волновой компоненты с частотой f_m. Соответствующие характеристики спектров горизонтальной составляющей скорости $S_u(f)$ содержатся в табл.3.3.2, где $U_{\max} \approx \left[\frac{\pi}{2} \right]^{1/2} \frac{\eta_{\max}}{\bar{\eta}} \sigma_U$ [71]. Вариант 1 представлен в качестве примера развивающегося волнения. Его достаточно хорошо описывает [57] спектр JONSWAP

$$S_I(f) = \alpha g^2 (2\pi)^{-4} f^{-5} \exp\left\{ -\frac{5}{4} \left(\frac{f_m}{f} \right)^4 + (\ln\gamma) \exp\left(-\frac{(f - f_m)^2}{2\delta^2 f_m^2} \right) \right\},$$

$$\delta = \begin{cases} 0.07, & f \le f_m \\ 0.09, & f > f_m \end{cases}, \quad \gamma = 3.3, \quad \alpha = 5.15 \cdot 10^{-3}.$$

Таблица 3.3.1

Вари-ант	u_{10}, м/с	P_u, %	G_u %	f_m, Гц	τ_m, С	P_f, %	G_f, %	σ^2, см^2	$\eta_{3\%}$, см	P_η, %	X, Км	u_{10}/C_m
I	7.8	18	60	0.300	3.3	48	75	120.0	58	58	–	–
I	6.5	18	60	0.210	4.8	48	75	350.0	99	58	110	0.879

Таблица 3.3.2

Вариант	f_m, Гц	τ_m,с	σ_U^2 ,(см/с)^2	U_{max}, см/с
I	0.303	3.3	640.3	69.77
II	0.238	4.2	1753.0	136.42

Вариант II отвечает практически развитому волнению, реализуемому в открытой части региона при установившемся ветре [56], что позволяет привлечь для описания такого рода волнения теоретический спектр Пирсона – Московитца

$$S_{II}(f) = \alpha g^2 (2\pi)^{-4} f^{-5} \exp\left\{-\frac{5}{4}\left(\frac{f_m}{f}\right)^4\right\}, \quad \alpha = 8.1 \cdot 10^{-3},$$

учитывая, что в ходе экспериментов ветер имел направление в диапазоне 300 – 0 – 120°, и экспериментальные функции углового распределения энергии достаточно узкие [56, 57], будем считать, что набегание ветровых волн на кромку льда происходит по нормали к ней для всех шести районов.

При выходе волн в зону взаимодействия с кромкой, их спектры могут быть трансформированы [49, 56, 57, 70] вследствие уменьшения глубины для некоторых из рассматриваемых районов. На рис. 3.3.1 – 3.3.3 приведены частотные спектры возвышений (рис. 3.3.1 *а* – 3.3.3. *а*) и спектры горизонтальной компоненты скорости (рис. 3.3.1 *б* – 3.3.3 *б*) набегающих (рис. 3.3.1) и прошедших (рис. 3.3.2, 3.3.3) волн. Римские цифры I, II отвечают номеру варианта. Порядок кривых сверху вниз соответствует порядку расположения номера района в столбце цифр. При этом, набегающие спектры даны с учетом их трансформации, обусловленной изменением глубины. Учет осуществлялся путем приравнивания потока энергии спектральной составляющей на глубокой и на мелкой воде [78]. Отметим, что спектры варианта I для всех районов и варианта II для второго района практически совпадают с глубоководными. Для других районов влияние изменения глубины оказалось также незначительным. Оно заключается в уменьшении дисперсии σ^2 в пределах 10 % и смещении спектрального максимума в высокочастотную область не более чем на $0.6 \cdot 10^{-2}$ Гц. Длина волны на частоте спектрального максимума в трансформированном изменением глубины спектре набегающих волн для районов 1–6 равна соответственно 17.29, 17.31, 17.31, 17.29, 17.31, 17.31 (вар.I) и 32.39, 35.08, 34.73, 32.39, 33.66, 33.66 (вар.II) метров.

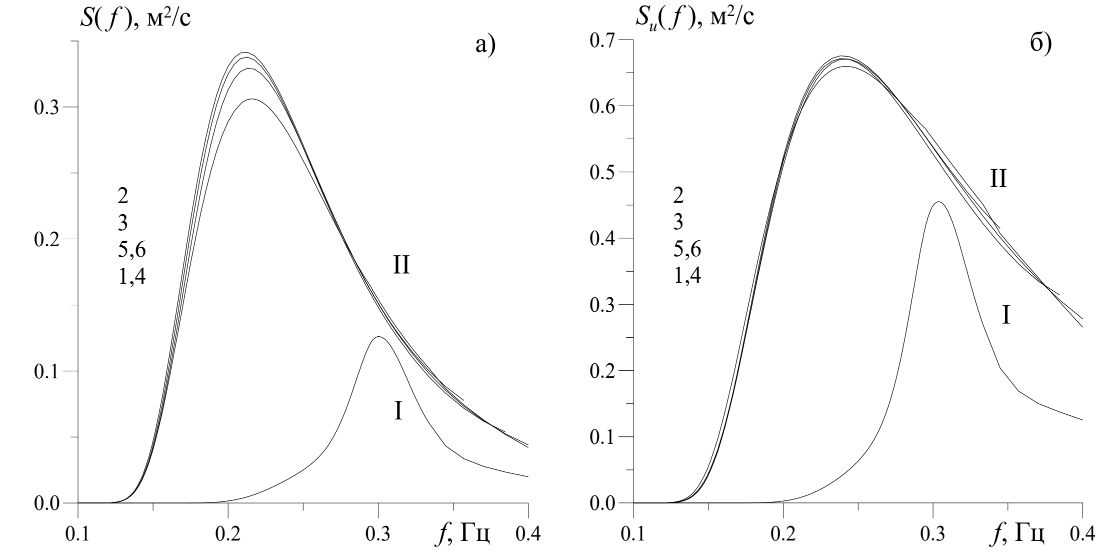

Рис. 3.3.1

Относительный вклад возбужденных в покрытой льдом области систем прогрессивных, прогрессивно–затухающих и краевых волн в волновые возмущения изменяется с удалением от кромки, что приводит к трансформации спектра прошедших волн. Практически стационарную форму спектры прошедших волн (рис. 3.3.2, 3.3.3) принимают на расстоянии, где вклад затухающих волн незначителен. Количественные оценки характеристик прошедших волн вынесены в таблицы 3.3.3, 3.3.4.

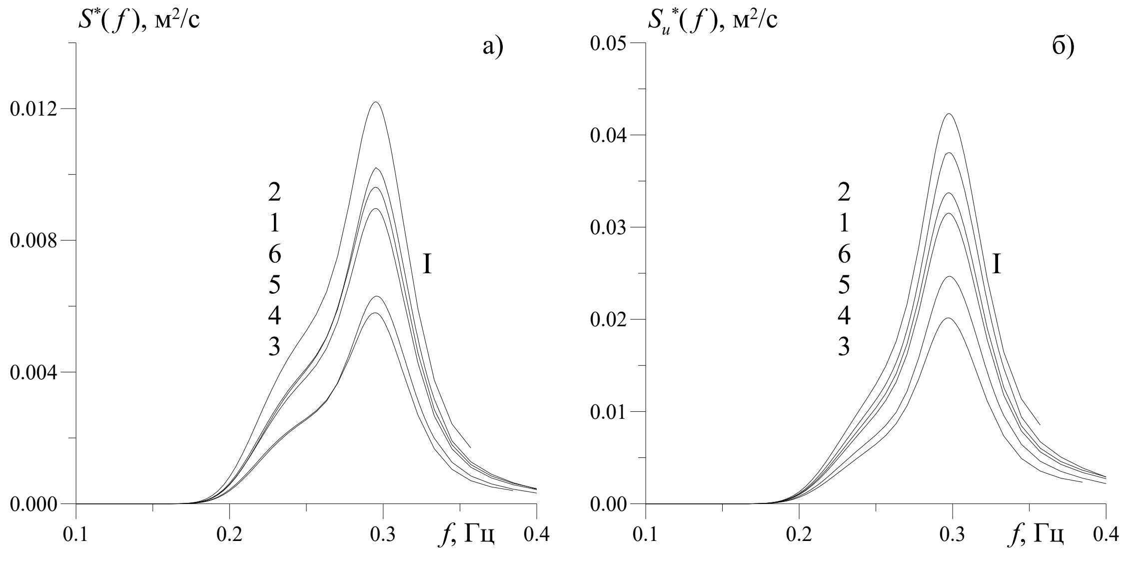

Рис. 3.3.2

Анализ полученных результатов показал, что ледяной покров смещает частоту спектрального максимума в низкочастотную область.

Для спектра горизонтальной компоненты скорости это смещение несколько больше, чем для частотного спектра возвышений. Наибольшее значение этого смещения имеет место при развитом (вар.II) волнении в районе 4. Для спектров возвышения и горизонтальной скорости оно составляет здесь примерно 0.0282 и 0.0539 Гц соответственно. Средние периоды и длины прошедших волн при развитом волнении меньше периода и длины волны компоненты с частотой f_m. В частности, для района 2 отличие λ_m от средней длины $\overline{\lambda}$ максимально и составляет около 6.1%. Соответствующее отклонение τ_m от $\overline{\tau}$ равно здесь примерно двенадцати процентам. В случае развивающегося волнения, для всех районов $\overline{\lambda}$ превышает λ_m на 4.06% – 5.70%, а среднее значение периода $\overline{\tau}$ практически совпадает с τ_m.

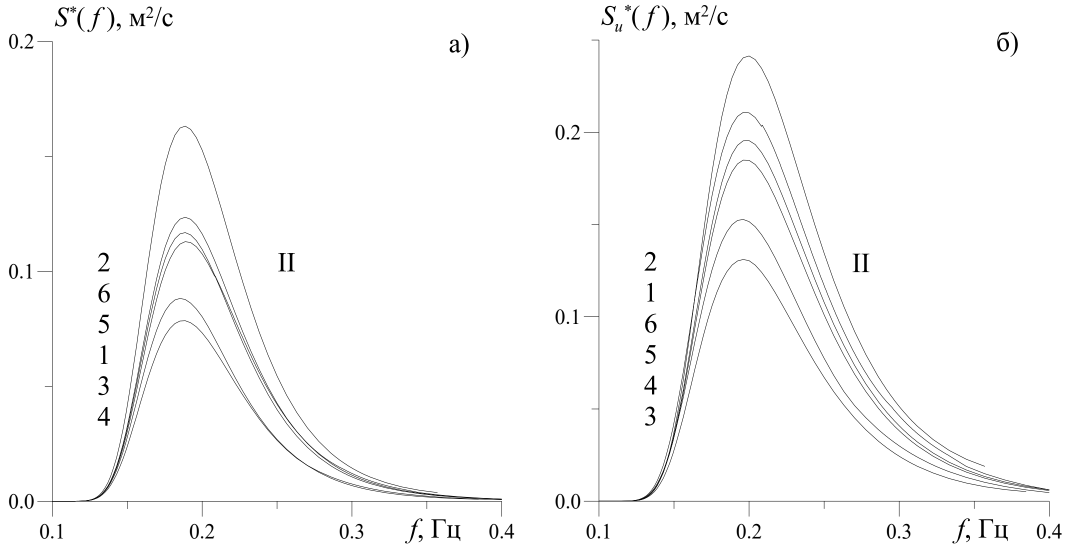

Рис.3.3.3

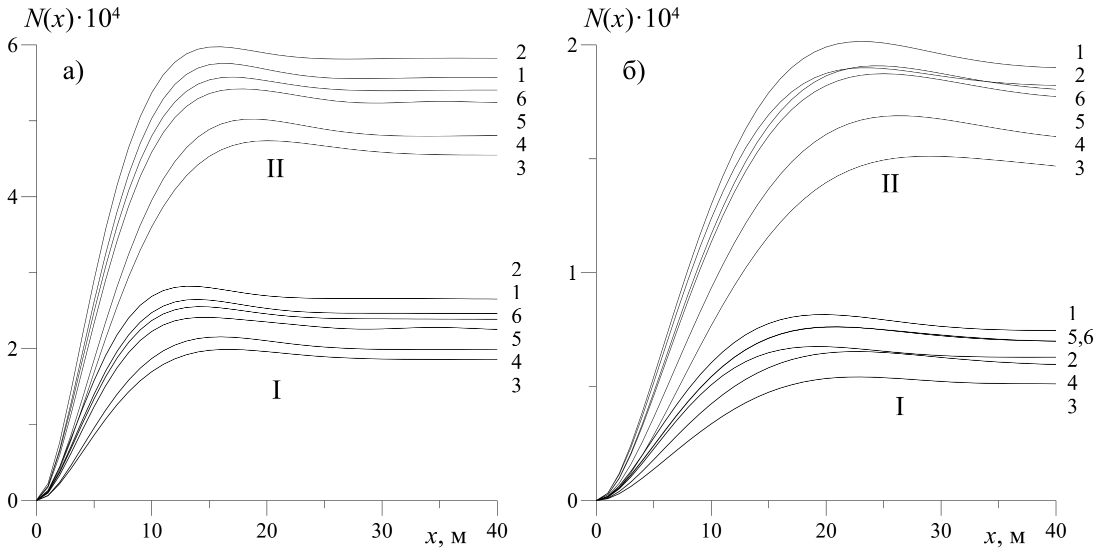

Рис. 3.3.4

Наибольшей пропускной способностью по амплитудам возвышений и горизонтальной составляющей скорости волн обладает кромка льда в районе Одессы. Эти волновые характеристики могут достигать здесь (вар.II) значений 62.39 см и 51.55 см/с. В районах Очакова и Скадовска пропускная способность минимальна.

Спектр напряжения $N_0^*(x, f)$ от набегающих волн единичной амплитуды сужается с удалением от кромки, где напряжение равно нулю. Пик спектра становится более выраженным, а частота пика убывает. Достигнув на некотором удалении x_0 своей верхней границы, спектр спадает, приближаясь к устойчивой форме. Количественные характеристики спектра $N_0^*(x, f)$ (при $S(f) \equiv 1$), выражающие сравнительную способность падающих волн различной частоты генерировать напряжение во льду, даны для рассматриваемых районов в табл. 3.3.5. Здесь f_m^0 и τ_m^0 представляют собой частоту и период волн, способных обеспечить наиболее значительное напряжение изгиба льда. Видно, что при одинаковой на всех частотах амплитуде падающих на кромку волн максимально возможное напряжение изгиба реализуется в районе 2 на удалении $x_0 \approx 15$ м. Чем дальше от кромки спектр $N_0^*(x, f)$ достигает своей верхней границы, тем меньшее значение его максимума. Отметим, что расстояние от кромки, на котором реализуется устойчивая форма спектра $N_0^*(x, f)$, характеризует ширину прикромочной зоны существенных изменений волновых характеристик. Она максимальна в районе Очакова и минимальна вблизи Одессы.

Таблица 3.3.5.

Район	Верхняя граница спектра				Устойчивая форма			
	f_m^0,Гц	τ_m^0,с	x_0,м	N_0^*,с	f_m, Гц	τ_m,с	x,м	N_0^*,с
1	0.2232	4.48	17.5	8.908	0.2119	4.72	45.0	8.445
2	0.2475	4.04	15.0	9.099	0.2347	4.26	37.5	8.496
3	0.2049	4.88	22.5	5.951	0.1953	5.12	52.5	5.530
4	0.2000	5.00	20.0	7.311	0.1887	5.30	50.0	6.947
5	0.2262	4.42	17.5	7.689	0.2128	4.70	47.5	7.162
6	0.2294	4.36	17.5	8.004	0.2174	4.60	45.0	7.443

Ожидаемое напряжение изгиба льда $N(x)$, определяемое его пропускной способностью $N_0^*(x, f)$ и спектральными характеристиками набегающего ветрового волнения (вар. I, II), приведено на рис. 3.3.4. Оно рассчитано для районов 1–6 по формуле (3.3.2) при различных значениях модуля упру гости и плотности льда, изменяющихся в течение зимнего периода. Кривым на рис. 3.3.4 *а* отвечают $E = 8{\cdot}10^8$ Н/м^2,

ρ_1 = 870 кг/м^3, а на рис. 3.3.4 *б* – E = 6·10^9 Н/м^2, ρ_1 = 922.5 кг/м^3. Графики показывают, что в рассматриваемых районах $N(x)$ достигает своего максимального значения N_m на различных расстояниях x_m от кромки. Величины N_m и соответствующие им x_m приведены в табл. 3.3.6. Отметим, что экспериментально полученная величина прочности морского льда на изгиб N_{kp} имеет большой разброс из-за различия условий ее определения. В частности, метод ломки на плаву ледяных балок, выпиленных из естественного ледяного покрова по всей его толщине, дает величину $N_{kp} \sim 5{\cdot}10^{-4}{\div}3{\cdot}10^{-3}$ [8, 124]. Прочность льда, полученная по испытании in situ, оказывается значительно меньшая, чем при определении ее по испытаниям малых образцов. Так, независимые измерения разломов морского льда во время океанических экспериментов дают величины N_{kp} порядка $3{\cdot}10^{-5} \div 8.5{\cdot}10^{-5}$ [100, 138, 142, 143, 147]. Из сопоставления расчетных значений напряжения с экспериментально полученными пределами прочности льда видно, что в случае развитого волнения высота волн, соответствующих спектру S_{II}, достаточна для разлома льда, поскольку величины $N(x)$ здесь значительно превышают N_{kp}. Более умеренное волнение (вар. I) вызывает в ледяном покрове меньшие напряжения. Рост упругости льда уменьшает напряжение $N(x)$, смещая при этом положение его максимума N_m вглубь покрытой льдом области.

Таблица 3.3.6.

	E=8·10^8 Н/м^2, ρ_1=870 кг/м^3				E=6·10^9 Н/м^2, ρ_1=922 кг/м^3			
	Вариант I		Вариант II		Вариант I		Вариант II	
	x_m, м	$N_m{\cdot}10^4$	x_m, м	$N_m{\cdot}10^4$	x_m, м	$N_m{\cdot}10^4$	x_m, м	$N_m{\cdot}10^4$
1	14	2.65	16	5.76	20	0.82	23	2.01
2	13	2.82	16	5.97	19	0.68	23	1.90
3	17	1.99	20	4.74	23	0.54	29	1.51
4	16	2.16	19	5.02	23	0.65	26	1.69
5	15	2.41	18	5.42	21	0.76	25	1.87
6	14	2.55	17	5.58	21	0.76	24	1.91

ГЛАВА 4. ТРАНСФОРМАЦИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН НЕОДНОРОДНОСТЬЮ РЕЛЬЕФА ДНА

4.1. Влияние битого льда на распространение поверхностных волн над уступом дна

Пусть на поверхности однородной идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей безграничный в горизонтальных направлениях бассейн с уступом дна, плавает битый лед толщиной h. Рассмотрим влияние льда на прохождение и отражение плоских поверхностных волн малой амплитуды [119–122], набегающих на уступ из глубоководной области.

Для математической постановки задачи берем систему координат (x, z), начало которой находится на поверхности бассейна над уступом дна. Ось x направим вдоль невозмущенной поверхности бассейна, а ось z – вертикально вниз. Справа от оси z ($x > 0$) расположена область бесконечной глубины ($0 \leq z < \infty$), а слева ($x < 0$) – область постоянной конечной глубины ($0 \leq z \leq H$). Движение жидкости в этих областях будем считать потенциальным.

Соответствующие потенциалы скорости запишем в виде

$$\Phi_j(x, z, t) = \varphi_j(x, z)e^{-i\omega t}, \quad j = 1, \quad x > 0; \quad j = 2, \quad x < 0. \qquad (4.1.1)$$

Здесь ω – заданная частота волны, падающей на уступ из области $x > 0$. Таким образом, задача сводится к решению уравнений Лапласа

$$\Delta\varphi_j = 0, \quad j = 1,2. \qquad (4.1.2)$$

Граничные условия задаются на поверхности бассейна ($z = 0$)

$$(1 - \kappa\omega^2)\frac{\partial\varphi_j}{\partial z} + \frac{\omega^2}{g}\varphi_j = 0, \quad j = 1, 2, \qquad (4.1.3)$$

и на дне в области ($j = 2$) конечной глубины ($z = H$) удовлетворим условию

$$\partial\varphi_2 / \partial z = 0. \qquad (4.1.4)$$

Кроме того, на стенке уступа в глубоководной области ($j = 1$) предполагается

$$(x = 0, \quad z > H), \quad \partial\varphi_1 / \partial x = 0, \qquad (4.1.5)$$

а в области $x > 0$ – ограниченность φ_1 при $z \to \infty$.

На границе контакта областей над уступом ($x = 0$, $0 \leq z \leq H$) удовлетворим условию непрерывности потенциалов и горизонтальных составляющих скорости волнового течения

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}. \qquad (4.1.6)$$

Здесь $\kappa = \rho_1 h(\rho g)^{-1}$, ρ и ρ_1 – плотность воды и льда соответственно, g – ускорение свободного падения.

Отметим, что условие (4.6) с учетом (4.1), (4.3) обеспечивает непрерывность не только гидродинамического давления в жидкости, но и скорости ее волновых возмущений.

Принимая во внимание (4.2), (4.3), (4.4), запишем потенциалы падающей из глубоководной области, прошедшей через уступ и отраженной от него волн соответственно в виде

$$\Phi^* = \varphi^* e^{-K_1 z - i(K_1 x + \omega t)}, \;\; \Phi_- \varphi_- e^{-iK_2 x + \varphi t)} \operatorname{ch} K_2 (z - H),$$

$$\Phi_+ = \varphi_+ y^{-K_1 z + i(K_1 x - \varphi t)}.$$

Здесь φ^*, φ_-, φ_+ – некоторые комплексные постоянные, а волновые числа K_1 и K_2 – действительные положительные корни дисперсионных уравнений

$$\omega^2 = \frac{K_1 g}{1 + \kappa K_1 g}, \quad \omega^2 = \frac{K_2 g \operatorname{th} K_2 H}{1 + \kappa K_2 g \operatorname{th} K_2 H}.$$

Отсюда

$$K_1 = K_2 \operatorname{th} K_2 H = \frac{\omega^2}{g(1 - \kappa\omega^2)}. \tag{4.1.7}$$

Отметим, что $K_2 \geq K_1$, так как $\operatorname{th} K_2 H \leq 1$. Если $\omega > \kappa^{-1/2}$, то $\omega^2/g(1-\chi\omega^2) < 0$ и дисперсионные уравнения не имеют действительных положительных корней. Следовательно, в жидкости с плавающим битым льдом прогрессивные волны с частотой, превышающей $\kappa^{-1/2}$, распространяться не могут [117, 156].

Удовлетворяя условию излучения, запишем

$$\varphi_1 \sim (\varphi^* e^{-iK_1 x} + \varphi_+ e^{iK_1 x}) e^{-K_1 z}, \quad x \to +\infty,$$

$$\varphi_2 \sim (\varphi_- e^{-iK_2 x} \operatorname{ch} K_2 (z - H), \qquad x \to -\infty.$$

Отклонения поверхности бассейна от невозмущенного уровня, вызванные падающей, прошедшей и отраженной волнами, определим из кинематического соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\zeta^*, \zeta_-, \zeta_+\right\} = \frac{\partial}{\partial z}\left\{\Phi^*, \Phi_-, \mathit{\Phi}_+\right\} \text{ при } z = 0.$$

С учетом (2.1) эти отклонения определяются как

$$\zeta^* = -i\frac{K_1}{\omega}\varphi^* e^{-i(K_1 x + \omega\, t)}, \quad \zeta_+ = -i\frac{K_1}{\omega}\varphi_+ e^{i(K_1 x - \omega\, t)}, \tag{4.1.8}$$

$$\zeta_- = i\frac{K_2}{\omega}\varphi_- e^{-i(K_2 x + \omega\, t)} \operatorname{ch} K_2 H.$$

Отметим, что значение φ^* предполагается известным, в то время как φ_+ и φ_- находятся из решения задачи.

Комплексные коэффициенты отражения R^* и прохождения T* имеют вид

$$R^* = \frac{\varphi_+}{\varphi^*}, \quad T^* = \frac{\varphi_-}{\varphi^*} \operatorname{ch} K_2 H. \tag{4.1.9}$$

Для дальнейшего решения задачи используем теорию волнового источника [2, 153]. Предположим, что на границе контакта областей над уступом ($x = 0,\ 0 \le z \le H$) горизонтальная скорость волновых возмущений является известной комплексной функцией $U(z)\mathrm{e}^{-i\omega t}$. Тогда потенциалы скорости на каждой стороне границы контакта должны удовлетворять условию

$$\partial\varphi_j / \partial x = U(z), \quad j = 1{,}2. \tag{4.1.10}$$

Рассматривая область $x \ge 0$, $0 \le z < \infty$, представим $\varphi_1(x, z)$ в виде

$$\varphi_1(x,z) = \varphi^* e^{-K_1(z+ix)} + \varphi_0(x,z). \tag{4.1.11}$$

Дополнительный потенциал $\varphi_0(x, z)$ вдали от уступа характеризует отраженную волну

$$\varphi_0(x,z) \sim \varphi_+ e^{K_1(ix-z)}, \quad x \to +\infty.$$

Он должен удовлетворять гидродинамическому условию (4.1.3) на поверхности рассматриваемой области бассейна. Для $x = 0$ из (4.1.5), (4.1.10) и (4.1.11) получим

$$\partial\varphi_0 / \partial x = V(z), \tag{4.1.12}$$

$$V(z) = U(z) + V^*(z), \quad 0 \le z \le H; \quad V(z) = V^*(z), \quad z > H,$$

$$V^*(z) = iK_1 \varphi^* e^{-K_1 z}.$$

Таким условиям удовлетворяет потенциал вида

$$\varphi_0(x,z) = -2ie^{K_1(ix-z)} \int_0^\infty V(\mu) e^{-K_1\mu} d\mu - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty V(\mu) \Psi(\mu, x, z) d\mu,$$

$$\Psi(\mu, x, z) = \int_0^\infty \frac{e^{-mx}(m\cos mz - K_1 \sin mz)(m\cos m\mu - K_1 \sin m\mu)}{m(K_1^2 + m^2)} dm. \tag{4.1.13}$$

Подставляя выражение V(z) из (2.6) в φ_0, получим

$$\varphi_0(x,z) = \left(\varphi^* - 2i \int_0^H U(\mu) e^{-K_1\mu} d\mu \right) \mathrm{e}^{K_1(ix-z)} - \frac{2}{\pi} \int_0^H U(\mu) \Psi(\mu, x, z) d\mu. \tag{4.1.14}$$

После подстановки (4.1.14) в (4.1.11) для $\varphi_1(x, z)$ найдем

$$\varphi_1(x,z) = 2e^{-K_1 z} \left(\varphi^* \cos K_1 x - ie^{iK_1 x} \int_0^H U(\mu) e^{-K_1\mu} d\mu \right) - \frac{2}{\pi} \int_0^H U(\mu) \Psi(\mu, x, z) d\mu. \tag{4.1.15}$$

Рассмотрим теперь область $x \le 0$, $0 \le z \le H$. Удовлетворив условию (4.1.4) на дне бассейна, зададим потенциал φ_2 в виде

$$\varphi_2(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n e^{k_n x}\cos k_n(z-H)\,. \qquad (4.1.16)$$

При k_n, удовлетворяющих уравнению

$$k_n\,\mathrm{tg}\,k_n H=-\frac{\omega}{g(1-\kappa\omega^2)}, \qquad (4.1.17)$$

обеспечивается и выполнение гидродинамического условия (4.1.3) на поверхности бассейна.

Уравнение (4.1.17) кроме счетного множества действительных корней имеет и два сопряженных мнимых корня. Из (4.1.17) видно, что этими корнями являются $\pm iK_2$. Для удовлетворения условию излучения в сумме (4.1.16) следует учитывать слагаемые, характеризуемые только мнимым $k_0=-iK_2$ и положительными действительными k_n ($n = 1, 2, \ldots$) корнями.

Из (4.1.10) имеем

$$U(z)=\sum_{n=0}^{\infty}U_n\cos k_n(z-H),\ U_n=A_n k_n\,. \qquad (4.1.18)$$

Умножая левую и правую части выражения (4.1.18) на $\cos k_l(z-H)$ и интегрируя в пределах от 0 до H, получим с учетом (4.1.17)

$$\int_0^H U(z)\cos k_l(z-H)dz=\frac{A_l}{4}(2k_lH+\sin 2k_lH)\,.$$

Определяя отсюда A_l, из (4.1.16) найдем

$$\varphi_2(x,z)=4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k_n e^{k_n x}\cos k_n(z-H)}{2k_nH+\sin 2k_nH}\int_0^H U(\mu)\cos k_n(\mu-H)d\mu\,. \qquad (4.1.19)$$

Так как $\varphi_1(0, z) = \varphi_2(0, z)$ при $0 \le z \le H$, то из (4.1.15) и (4.1.19) для определения функции $U(z)$ получим интегральное уравнение с ядром Q

$$\int_0^H U(\mu)Q(z,\mu)d\mu=\varphi^* e^{-K_1 z}\,, \qquad (4.1.20)$$

$$Q(z,\mu)=ie^{-K_1(z+\mu)}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos k_n(z-H)\cos k_n(\mu-H)}{2k_nH+\sin 2k_nH}+\frac{1}{\pi}\Psi(\mu,0,z)\,.$$

Из (4.1.13) находим

$$\Psi(\mu,0,z)=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{z+\mu}{z-\mu}\right|-e^{-K_1(z+\mu)}\,\overline{\mathrm{Ei}}\left[K_1(z+\mu)\right].$$

Здесь $\overline{\mathrm{Ei}}(x)=\int_{-\infty}^{x}(e^t/t)dt$ – интегральная показательная функция [101].

Для решения интегрального уравнения (4.1.20) используем разложение $U(z)$ по ортогональной системе собственных функций в виде (4.1.18). После подстановки (4.1.18) и (4.1.20) получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n \int_0^H \cos k_n(\mu - H) Q(z,\mu)\, d\mu = \varphi^* e^{-K_1 z}. \tag{4.1.21}$$

Умножая обе части уравнения (4.1.21) на $\cos k_l(z-H)$ ($l = 0,\ 1,\ 2,\ldots$) и интегрируя в пределах от 0 до H, получим систему комплексных алгебраических уравнений

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n \int_0^H \int_0^H \cos k_l(z-H) \cos k_n(\mu - H) Q(z,\mu) d\mu dz = \varphi^* \int_0^H e^{-K_1 z} \cos k_l(z-H) dz.$$

Отсюда после вычисления интегралов с учетом (2.11) найдем

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n \left[\frac{K_1^2 e^{-2K_1 H}\left[\pi i - \overline{\mathrm{Ei}}(2K_1 H)\right]}{\pi(K_1^2 + k_l^2)(K_1^2 + k_n^2)} + Z(k_l, k_n) \right] = -\varphi^* \frac{K_1 e^{-K_1 H}}{K_1^2 + k_l^2}, \tag{4.1.22}$$

$$Z(k_l, k_n) = \frac{1}{2\pi(k_l^2 - k_n^2)} \left[\ln \frac{\bar{k}_n}{\bar{k}_l} + \mathrm{Ci}(2\bar{k}_l H) - \mathrm{Ci}(2\bar{k}_n H) \right], \quad l \neq n,$$

$$Z(k_l, k_n) = \left(H - \frac{K_1}{K_1^2 + k_l^2} \right) \left(\frac{\mathrm{Si}(2\bar{k}_l H)}{2\pi \bar{k}_l} + \frac{1}{4k_l} \right) - \frac{K_1^2}{2\pi k_l^2 (K_1^2 + k_l^2)}, \quad l = n.$$

Здесь $\mathrm{Si}(x)$ и $\mathrm{Ci}(x)$ – интегральные синус и косинус [101], а для аргументов k_l и k_n выбраны главные значения.

Искомые комплексные коэффициенты отражения R^* и прохождения T^* определяются через U_n, найденные из решения системы (4.1.22). Из (4.1.9), (4.1.14) и (4.1.18) найдем

$$R^* = 1 + 2iK_1 e^{-K_1 H} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{K_1^2 + k_n^2}, \quad u_n = \frac{U_n}{\varphi^*}. \tag{4.1.23}$$

Выражая A_n из (4.1.18) и подставляя в (4.1.16), получим

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_n}{k_n} e^{k_n x} \cos k_n (z - H).$$

Так как прошедшей волне соответствует $k_0 = -iK_2$, то ее вклад в φ_2 выражается слагаемым

$$\frac{iU_0}{K_2} e^{-iK_2 x} \operatorname{ch} K_2 (z - H).$$

Следовательно, $\varphi_- = iU_0/K_2$. Тогда из (4.1.19) имеем

$$T^* = \frac{iu_0}{K_2} \operatorname{ch} K_2 H. \tag{4.1.24}$$

Найдем теперь выражения для функции возвышения поверхности бассейна. Подстановка (4.1.15) в кинематическое условие (4.1.8) дает

$$\zeta_1=\frac{2iK_1}{\omega}\left[-\varphi^*\cos(K_1x)+ie^{iK_1x}\int_0^H U(\mu)e^{-K_1\mu}d\mu+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi}\int_0^H U(\mu)\int_0^\infty \frac{e^{-mx}}{K_1^2+m^2}(m\cos m\mu-K_1\sin m\mu)dmd\mu\right]e^{-i\omega t}.$$

Отсюда с учетом (2.11), (2.12) найдем

$$\zeta_1=\Lambda(e^{-K_1x}+R^*e^{iK_1x})+\eta_1,\quad \Lambda=-iK_1\varphi^*e^{-i\omega t}/\omega, \qquad (4.1.25)$$

$$\eta_1=-\frac{2\Lambda}{\pi}\sum_{n=0}^\infty u_n\int_0^\infty\frac{M(k_n,m)e^{-mx}}{K_1^2+m^2}dm,$$

$$M(k_n,m)=m(m\sin mH+K_1\cos mH)(m_2-k_n^2)^{-1},\quad m\neq k_n,$$

$$M(k_n,m)=\left[(K_1^2+k_n^2)H-K_1\right](2k_n)^{-1}\cos k_nH,\quad m=k_n.$$

Подставляя (4.1.24) в (4.1.8) и учитывая (4.1.15), получим

$$\zeta_2=\Lambda T^*e^{-iK_2x}+\eta_2,\quad \eta_2=\Lambda\sum_{n=1}^\infty\frac{u_n\cos k_nH}{k_n}e^{k_nx}. \qquad (4.1.26)$$

Отметим, что η_1 и η_2 характеризуют вклад затухающих с удалением от уступа (прибарьерных) мод. Амплитуда смещения поверхности бассейна в областях бесконечной ($\zeta_a = |\zeta_1|$) и конечной ($\zeta_a = |\zeta_2|$) глубины вдали от уступа может быть представлена в виде $\zeta_a=K_1\varphi^*\left[1+R^2+2R\cos(2K_1x+R_0)\right]^{1/2}/\omega$ и $\zeta_a=K_1T\varphi^*/\omega$ соответственно. Здесь $R = |R^*|$, $T=|T^*|$ – амплитудные коэффициенты отражения и прохождения, $R_0 = (180°/\pi)\mathrm{arctg}(\mathrm{Im}R^*/\mathrm{Re}R^*)$ – фазовый сдвиг отраженной волны.

Для численной реализации задачи (4.1.22) – (4.1.26) использовался метод сопряженных градиентов. Количество n учитываемых собственных мод при численных расчетах выбиралось таким образом, чтобы относительный вклад такого же числа последующих мод в определении коэффициентов отражения и прохождения составлял не более 0.5%. При этом плотность льда и воды полагались равными 870 и 1000 кг·м$^{-3}$. Глубина залегания уступа, толщина льда и частота набегающей на уступ волны изменялись соответственно в пределах $10\text{ м}\le H\le 1000\text{ м}$, $0\le h\le 4$ м и $0<\omega<\min\{\sigma, 2\text{с}^{-1}\}$. Здесь величина σ равна бесконечности при отсутствии льда ($h = 0$) и $\kappa^{-1/2}$ в ледовых условиях ($h\neq 0$).

Анализ результатов численных расчетов показал, что амплитудный коэффициент отражения является монотонно убывающей функцией частоты набегающей волны. Плавающий битый лед при фиксированном значении ω уменьшает величину R. Амплитудный коэффициент прохождения как функция ω имеет минимум, равный примерно 0.91.

Соответствующая ему частота падающей волны в ледовых условиях меньше, чем при отсутствии льда. Отметим, что

$$\lim_{\omega\to 0} R = 1, \quad \lim_{\omega\to\sigma} R = 0, \quad \lim_{\omega\to 0} T = 2, \quad \lim_{\omega\to\sigma} T = 1.$$

Скорость стремления R и T к предельным значениям при $\omega \to \sigma$ увеличивается с ростом h.

С ростом глубины залегания уступа для фиксированной частоты ω влияние льда на коэффициенты отражения и прохождения ослабевает.

Фазовые сдвиги прошедшей ($T_0 = (180°/\pi)\mathrm{arctg}(\mathrm{Im}T^*/\mathrm{Re}T^*)$) и отраженной ($R_0$) волн как функции ω достигают максимумов при $\omega = \omega_-$ и ω_+ соответственно. Плавающий лед уменьшает величину ω_+, практически не влияя на ω_-. Чем толще лед, тем быстрее стремление T_0 к нулю при $\omega \to \sigma$.

Иллюстрации влияния льда на распределение величин R, T и R_0, T_0 по частоте падающей волны $\omega(\mathrm{c}^{-1})$ приведены на рис.4.1.1 для $H = 1$ м. Отметим, что кривым 1–3 на этой фигуре отвечают значения h, равные 0, 2, 4 м.

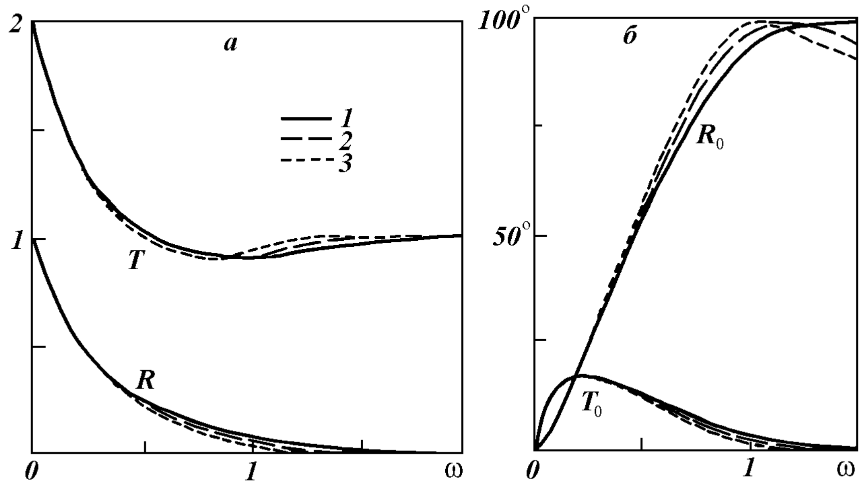

Рис. 4.1.1.

Зависимость амплитуды смещения поверхности бассейна ζ_a в областях бесконечной и конечной глубины от частоты $\omega(\mathrm{c}^{-1})$ и расстояния от уступа дна x(м) показана на рис. 4.1.2, *а* в случае единичной амплитуды падающей волны при толщине льда 2м и глубине залегания уступа 10 м. Здесь же (рис.4.1.2, *б*) приведена аналогичная зависимость для $\mathrm{Re}\,\zeta$ ($\mathrm{Re}\,\zeta_1$, $x > 0$ и $\mathrm{Re}\,\zeta_2$, $x < 0$), характеризующая изменение формы поверхности бассейна с удалением от уступа для заданной частоты ω в моменты времени $t = 2\pi k/\omega$ ($k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$). Влияние плавающего льда на функции $\zeta_a(x)$, $\mathrm{Re}\,\zeta(x)$, $\mathrm{Im}\,\zeta(x)$ характеризуют кривые 1–3 на рис.4.1.3 при $H = 10$ м. Отметим, что $\mathrm{Im}\,\zeta$ характеризует изменение формы поверхности бассейна с удалением от уступа для моментов времени $t = (2k - 1/2)\pi/\omega$.

Видно, что перед уступом ($x > 0$) амплитуда смещения поверхности ζ_a при фиксированном ω может изменяться с расстоянием x, так как волновые возмущения в этой области формируются набегающими и отраженными волнами, а также затухающими с удалением от уступа модами. С ростом ω вклад отраженных волн в ζ_a убывает и для выбранной глубины уступа становится практически незаметным при $\omega > 1.25$ с$^{-1}$.

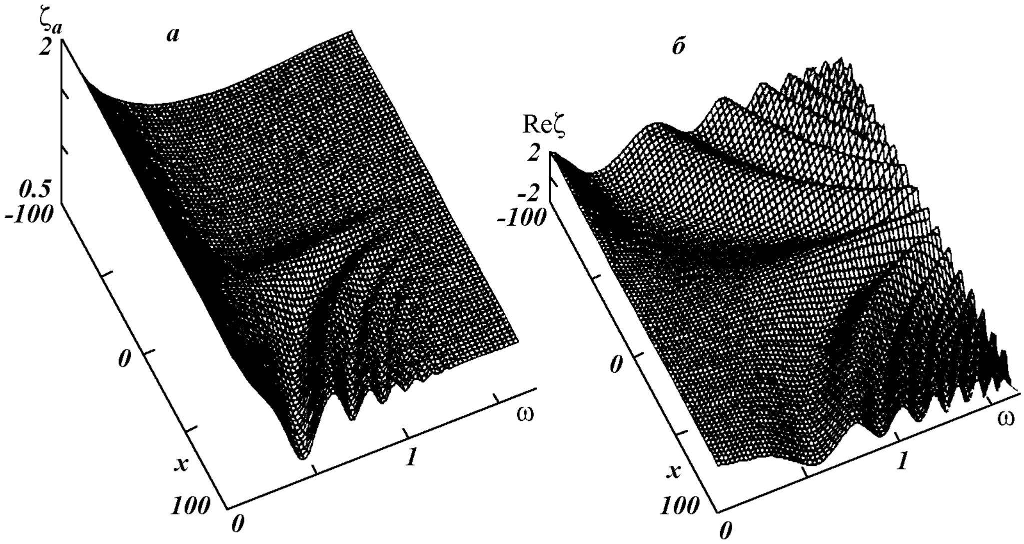

Рис. 4.1.2.

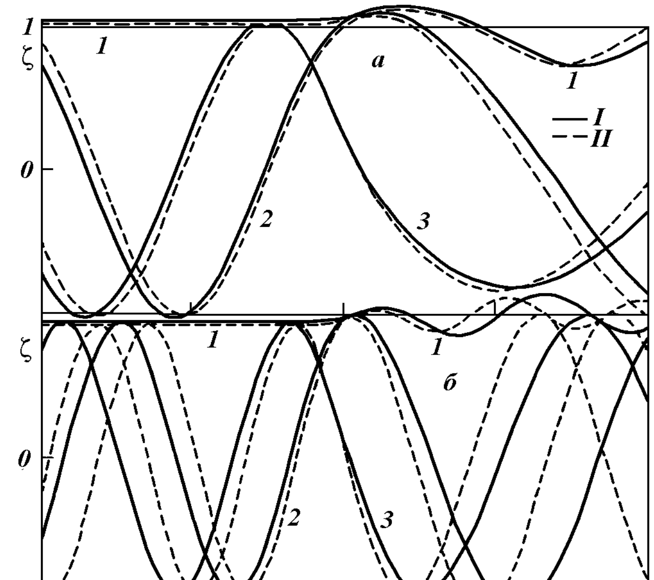

Рис. 4.1.3.

Величина вклада прибарьерных мод в формирование возмущений жидкости перед уступом и его распределение от уступа также зависят от частоты ω. Это иллюстрируют кривые равных значений $|\eta_1|$, нормированных на амплитуду набегающей волны. Для $H = 10$ м они приведены на рис. 4.1.4. Вид изолиний показывает убывание величины $|\eta_1|$ с удалением от уступа. На фиксированном расстоянии эта величина как функция частоты набегающей волны имеет максимум. Частота максимального вклада $|\eta_1|$ убывает с удалением от уступа. В частности, для условий рис. 4.1.4 она примерно равна 0.24 и 0.12 $с^{-1}$ непосредственно над уступом ($x = 0_+$) и на расстоянии 75 м от него соответственно. Максимум $|\eta_1|$ по частоте над уступом и на расстоянии 75 м от него составляет 59 и 22% амплитуды падающей волны. Вклад η_1 в структуру возмущений поверхности бассейна перед уступом может проявиться в уменьшении величины первого от уступа максимума амплитуды ζ_a как функции x (кривые 1 на рис. 4.1.3). При $\omega > 1.25$ $с^{-1}$ относительная величина вклада η_1 не превышает 5%.

За уступом ($x < 0$) амплитуда возмущений ζ_a при фиксированной частоте ω остается практически постоянной с изменением x и равной коэффициенту прохождения. Исключение составляет ближняя окрестность уступа, где проявляется, хотя и незначительно, влияние прибарьерных мод. В частности, при $H = 10$ м, $h = 0$ непосредственно над уступом ($x = 0_-$) их максимальный по частоте вклад примерно равен 4% амплитуды набегающей на уступ волны. Он достигается при $\omega \approx 0.91$ $с^{-1}$. С удалением от уступа величина вклада $|\eta_2|$ убывает. На расстоянии 7 м он составляет уже около 1%. Распределение нормированной на амплитуду падающей волны величины $|\eta_2|$ по ω и x иллюстрируют изолинии на рис. 4.1.5 при $H = 10$ м.

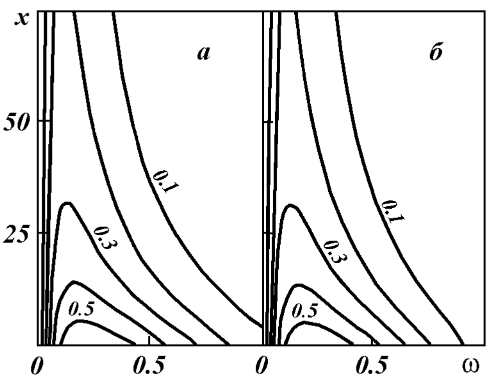

Рис. 4.1.4

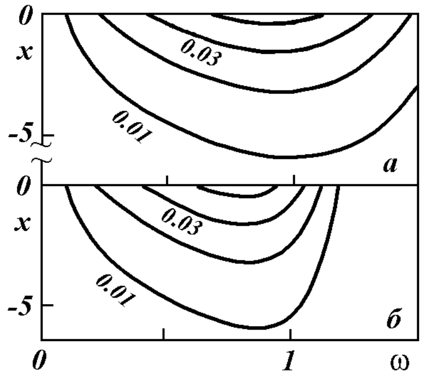

Рис.4.1.5

В ближней окрестности уступа амплитуда возмущений поверхности бассейна большая перед уступом, чем за ним.

С ростом ω разница в длинах волновых возмущений перед и за уступом убывает, а поверхность бассейна принимает форму монохроматической набегающей волны, не искаженную влиянием уступа.

Увеличение толщины льда приводит к уменьшению длин волновых возмущений поверхности бассейна как перед уступом, так и за ним, что характеризуют графики распределения $\mathrm{Re}\,\zeta$ и $\mathrm{Im}\,\zeta$ по x и ω (рис. 4.1.3). Влияние льда на ζ_a за уступом при $H = 10$ м заметно проявляется лишь при $1\ \text{с}^{-1} \leq \omega \leq 1.6\ \text{с}^{-1}$. Перед уступом длины и амплитуда осцилляции ζ_a как функции расстояния x убывают с ростом толщины льда. Это убывание усиливается с приближением ω к частоте плавучести льда $\kappa^{-1/2}$. Оно объясняется уменьшением амплитуды отраженных волн.

Плавающий лед сужает частотный диапазон заметного проявления прибарьерных мод в волновом возмущении жидкости, как перед уступом, так и за ним. Величина максимального вклада и частота, на которой он достигается, при этом практически не ощущают влияния льда в области перед уступом. За уступом величина максимального вклада прибарьерных мод также не меняется с ростом h. В то же время соответствующая ему частота набегания уменьшается, хотя и незначительно. В частности, для условий рис.4.1.5 это уменьшение составляет 14% при изменении h от 0 до 4 м.

Таким образом искажающее воздействие плавающего битого льда на характеристики волнового возмущения, формируемого при набегании прогрессивных поверхностных волн на уступ дна, заметно сказывается в основном при частотах набегания, сравнимых по порядку величин с частотой плавучести льда.

Плавающий битый лед уменьшает величину амплитудного коэффициента отражения. Частота минимума амплитудного коэффициента прохождения убывает под воздействием льда. Чем толще лед, тем большая скорость стремления коэффициентов отражения и прохождения к их предельным значениям на частоте плавучести. С ростом глубины залегания уступа влияние льда на коэффициенты отражения и прохождения ослабевает.

Частота, на которой достигается максимум фазового сдвига отраженной волны, убывает с ростом толщины льда. Влияние льда на частоту максимального сдвига фазы прошедшей волны не проявляется. На частотах, больших частоты максимума, плавающий лед уменьшает фазовый сдвиг прошедшей волны.

Увеличение толщины льда приводит к уменьшению длин волновых возмущений поверхности бассейна как перед уступом, так и за ним. С ростом набегающей волны разница в длинах волновых возмущений поверхности бассейна перед и за уступом убывает, а сама поверхность принимает форму монохроматической волны, не искаженную влиянием уступа.

Амплитуда возмущений поверхности бассейна в области перед уступом может осциллировать с удалением от него. С ростом толщины льда длина этих осцилляций и диапазон изменения амплитуды возмущений уменьшаются.

Амплитудный вклад затухающих (прибарьерных) мод в волновое возмущение зависит от частоты набегающей волны. Величина вклада и ширина зоны его заметного проявления перед уступом существенно большие, чем за ними. Под воздействием льда сужается частотный диапазон проявления затухающим мод.

4.2. Влияние битого льда на скорость волновых течений при прохождении прогрессивных волн над уступом дна

В настоящем разделе рассматривается влияние плавающего битого льда на движение жидких частиц при распространении плоских линейных поверхностных волн произвольной длины из глубоководной области бассейна через уступ дна в области конечной глубины. Анализируется зависимость скорости волновых течений в слое жидкости перед и за уступом от частоты падающей волны, толщины льда и глубины залегания уступа.

Для определения горизонтальной

$$v_{1,2} = \partial\varphi_{1,2} / \partial x, \qquad (4.2.1)$$

и вертикальной

$$w_{1,2} = \partial\varphi_{1,2} / \partial z, \qquad (4.2.2)$$

скоростей частиц жидкости нам необходимо вывести формулы для их потенциалов в глубоководной области конечной глубины. Применяя метод волнового источника [153] аналогично [28], найдем

$$\varphi_1(x,z) = 2e^{-K_1 z}\left(\varphi^* \cos K_1 x - ie^{iK_1 x}\int_0^H U(\mu)e^{-K_1\mu}d\mu\right) - \frac{2}{\pi}\int_0^H U(\mu)\psi(\mu,x,z)d\mu, \qquad (4.2.3)$$

$$\varphi_2(x,z) = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k_n e^{k_n x}\cos k_n(z-H)}{2k_n H + \sin 2k_n H}\int_0^H U(\mu)\cos k_n(\mu - H)d\mu. \qquad (4.2.4)$$

Здесь

$$\psi(\mu,x,z) = \int_0^{\infty}\frac{e^{-mx}(m\cos mz - K_1\sin mz)(m\cos m\mu - K_1\sin m\mu)}{m\left(K_1^2 + m^2\right)}dm,$$

$$U(z) = v_1(0,z) = v_2(0,z),$$

φ^* – величина амплитуды падающей волны на поверхности бассейна, K_1 – волновое число падающей волны, k_n – волновые числа собственных мод волновых возмущений в области конечной глубины. При этом

$$K_1 = \frac{\omega^2}{g(1-\kappa\omega^2)}, \quad k_n \operatorname{tg} k_n H + K_1 = 0, \quad k_0 = -iK_2,$$

а K_2 и k_n при $n \ge 1$ – действительные положительные.

Удовлетворяя условию (4.1.6), получим выражение для $U(z)$ в виде разложения по ортогональной системе собственных функций

$$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \cos k_n (z - H), \qquad (4.2.5)$$

где коэффициенты $U(n)$ определяются из алгебраической системы уравнений:

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n \left[\frac{K_1^2 \mathrm{e}^{-2K_1 H} \left[\pi i - \overline{\mathrm{Ei}}(2K_1 H)\right]}{\pi(K_1^2 + k_l^2)(K_1^2 + k_n^2)} + Z(k_l, k_n) \right] = -\varphi * \frac{K_1 \mathrm{e}^{-K_1 H}}{K_1^2 + k_l^2},$$

$$Z(k_l, k_n) = \frac{1}{2\pi(k_l^2 - k_n^2)} \left[\ln \frac{\overline{k_n}}{\overline{\overline{k_l}}} + \mathrm{Ci}(2\overline{k_l} H) - \mathrm{Ci}(2\overline{k_n} H \right], \quad l \ne n, \qquad (4.2.6)$$

$$Z(k_l, k_l) = \left(H - \frac{K_1}{K_1^2 + k_l^2} \right) \left(\frac{\mathrm{Si}(2\overline{k_l} H}{2\pi \overline{k_l}} + \frac{1}{4k_l} \right) - \frac{K_1^2}{2\pi k_l^2 (K_1^2 + k_l^2)}, \quad l = n,$$

$\mathrm{Si}(x)$ и $\mathrm{Ci}(x)$ – интегральные синус и косинус, $\overline{\mathrm{Ei}}(x)$ – интегральная показательная функция, $k_0 = -k_0$, $\overline{k_i} = k_i$ при $i \ge 1$.

Подставляя (3), (4) в (1), (2), с учетом (5) получим

$$\begin{aligned} v_1 &= V * \mathrm{e}^{-K_1 z} \left(\mathrm{e}^{-iK_1 x} - R * \mathrm{e}^{iK_1 x} \right) + v_1^*, \\ v_2 &= V * T * \mathrm{e}^{-iK_2 x} \left(K_2 \mathrm{ch} K_2 z / K_1 - \mathrm{sh} K_2 z \right) + v_2^*, \\ w_1 &= -iV^* \mathrm{e}^{-K_1 x} \left(\mathrm{e}^{-iK_1 x} + R^* \mathrm{e}^{iK_1 x} \right) + w_1^*, \\ w_2 &= -iV^* T^* \mathrm{e}^{-K_2 x} \left(\mathrm{ch} K_2 z - K_2 \mathrm{sh} K_2 z / K_1 \right) + w_2^*, \end{aligned} \qquad (4.2.7)$$

где

$$v_1^* = \frac{2iV^*}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} u_n \int_0^{\infty} \frac{M(k_n, m) \mathrm{e}^{-mx} \, dm}{m^2 + K_1^2} \left(\frac{m}{K_1} \cos mz - \sin mz \right),$$

$$v_2^* = iV^* \sum_{n=1}^{\infty} u_n \, \mathrm{e}^{k_n x} (\cos k_n z / K_1 - \sin k_n z / k_n) \cos k_n H,$$

$$w_1^* = \frac{2iV^*}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} u_n \int_0^{\infty} \frac{M(k_n, m) \mathrm{e}^{-mx} \, dm}{m^2 + K_1^2} \left(\frac{m}{K_1} \sin mz + \cos mz \right),$$

$$w_2^* = -iV^* \sum_{n=1}^{\infty} u_n \, \mathrm{e}^{k_n x} (\cos k_n z / k_n + \sin k_n z / K_1) \cos k_n H,$$

$$R^* = 1 + 2iK_1 \, \mathrm{e}^{-K_1 H} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{K_1^2 + k_n^2}, \quad u_n = U_n / \varphi^*,$$

$$T^* = \frac{iu_0}{K_2} \mathrm{ch} \, K_2 H, \quad V^* = -iK_1 \varphi^* \, \mathrm{e}^{-i\omega t},$$

$$M(k_n, m) = m\left(m\sin mH + K_1\cos mH\right)\left(m^2 - k_n^2\right)^{-1}, \quad m \neq k_n,$$
$$M(k_n, m) = \left[\left(K_1^2 + k_n^2\right)H - K_1\right](2k_n)^{-1}\cos k_n H, \quad m = k_n.$$

Отметим, что $v_1^*, v_2^*, w_1^*, w_2^*$ в выражениях (4.2.7) характеризуют вклад затухающих с удалением от уступа (прибарьерных) мод. Члены с множителями R^* и T^* (амплитудными коэффициентами отражения и прохождения) соответствуют вкладам отраженной и прошедшей волн. Остальные члены характеризуют вклад падающей волны.

Для анализа влияния льда на горизонтальную и вертикальную составляющие скорости волновых течений проводились численные расчеты. При этом плотности льда и воды полагались равными 870 и 1000 кг·м$^{-3}$. Глубина залегания уступа, толщина льда и частота набегающей на уступ волны изменялись соответственно в пределах $10\text{ м} \leq H \leq 100\text{ м}$, $0 \leq h \leq 4\text{ м}$ и $0 < \omega < \min\{\sigma, 2\text{ с}^{-1}\}$. Здесь величина σ равна бесконечности при отсутствии льда ($h = 0$) и $k^{-1/2}$ в ледовых условиях ($h \neq 0$).

Для решения системы (4.2.6) использовался метод сопряженных градиентов. Количество n учитываемых собственных мод при численных расчетах выбиралось таким образом, чтобы относительная поправка, вызванная вкладом такого же числа последующих мод в определение скоростей волновых течений вблизи поверхности бассейна, составляла не более 0.5%.

Отметим, что при исследовании не будем касаться значений горизонтальной и вертикальной скоростей непосредственно на краю уступа дна, а рассмотрим лишь значения вне его окрестности. Это связано с тем, что граничные условия для v и w на твердой границе в вершине уступа, строго говоря, терпят разрыв. Как показал численный анализ, в окрестности края уступа наблюдается рост градиентов вертикальной и особенно горизонтальной составляющих скорости волновых течении. Причем эти градиенты тем большие, чем длиннее падающая волна. Поскольку с ростом толщины льда волновое число падающей на уступ волны заданной частоты увеличивается, то влияние ледяного покрова проявляется в ослаблении градиентов, составляющих скорости вблизи уступа. В частности, с ростом h от 0 до 4 м для волн малых частот ($\omega \approx 0.5\text{ с}^{-1}$) ослабление градиентов амплитуд v и w может достигать 10% и 5% соответственно. Увеличение частоты падающей волны усиливает этот эффект. Например, при $\omega \approx 1\text{ с}^{-1}$ скачек амплитуды v и w с ростом h ослабевает почти вдвое.

Некоторые результаты расчетов приведены на рисунках. На каждом из них вычерчен профиль уступа дна. На рис. 4.2.1, 4.2.2 даны изолинии горизонтальной составляющей скорости при частоте падающей волны $\omega = 1$ с$^{-1}$. При этом рис. 4.2.1 иллюстрирует распределение скорости в момент времени $t = 0$, когда при отсутствии уступа на линию его расположения приходил бы гребень падающей волны. Изолинии на рис. 4.2.2 соответствуют моменту $t = \pi/2\omega$, когда при отсутствии уступа на линию $x = 0$ приходил бы узел падающей волны при смене гребня на впадину. Верхние и нижние картины отвечают толщине льда 0 и 4 м. Обозначения на изолиниях (м·с$^{-1}$) даны при амплитуде падающей волны 1 м. Изолинии представлены с интервалом 0.1 (м·с$^{-1}$). Сплошные и штриховые линии характеризуют волновое течение в положительном и отрицательном направлениях оси x соответственно.

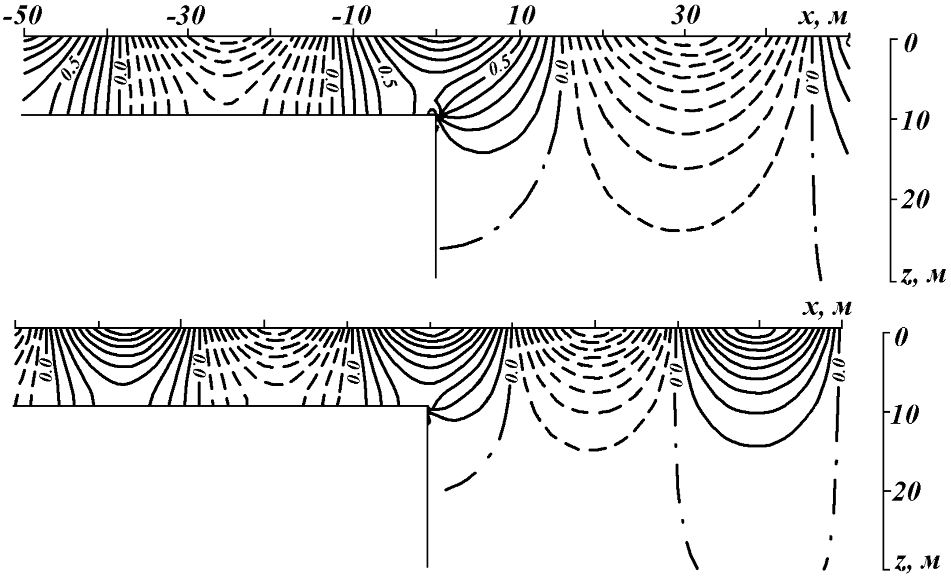

Рис. 4.2.1.

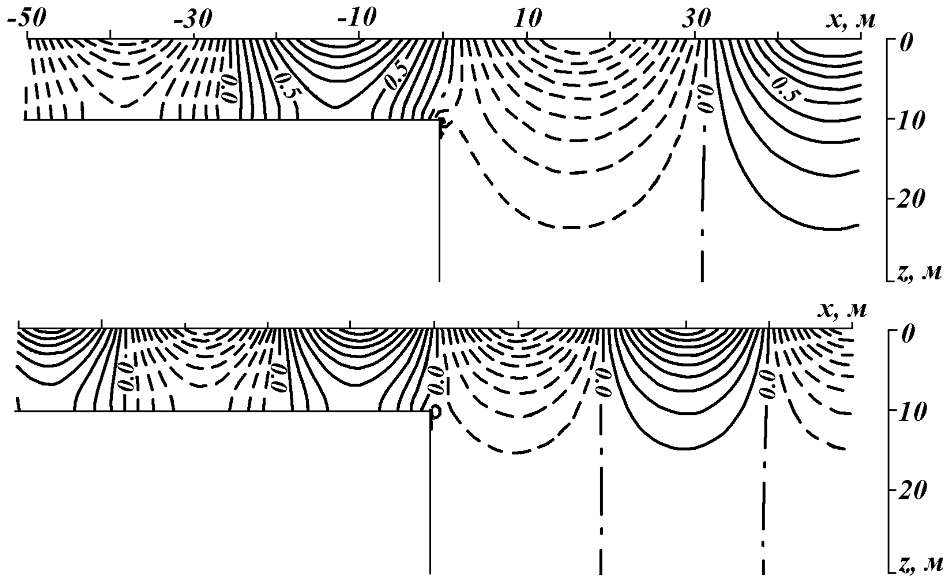

Рис. 4.2.2.

Видно, что на расстояниях (по горизонтали) от уступа, превышающих H, в области бесконечной глубины вид изолиний v мало отличается от характерного для монохроматической волны. Это свидетельствует о том, что в рассматриваемой области горизонтальная составляющая скорости волновых течений определяется практически только падающей волной. Вклад прибарьерных затухающих мод здесь незаметен, а влияние отраженной волны вследствие малого коэффициента отражения сказывается лишь в слабом наклоне нулевых изолиний. С ростом h длина волны заметно уменьшается.

Ближе к линии $x = 0$ влияние становится более заметным. В глубоководной прибарьерной зоне изолинии горизонтальной скорости при $t = 0$ (рис. 4.2.1) изгибаются в направлении вершины уступа. Это свидетельствует о возрастании градиента скорости. Из сравнения верхней и нижней картин видно, что при наличии битого льда изгибается меньшее число изолиний.

Ближайшая к уступу в глубоководной области нулевая изолиния изгибается в сторону стенки уступа. Причем в ледовых условиях изгиб заметен на меньшей глубине, чем для бассейна с открытой поверхностью, поскольку плавающий лед усиливает затухание волновых возмущений с глубиной.

При $t = \pi/2\omega$ (рис. 4.2.2) влияние прибарьерных мод выражено слабее. Деформации изолиний малозаметны, а наблюдаются только изгиб нулевой изолинии и разрыв изолинии – 0.1 м·с$^{-1}$. Это свидетельствует о том, что над уступом на глубинах больших 0.5 H горизонтальная скорость нулевая, хотя ее градиенты в 4–5 раз меньше, чем для $t = 0$. Наличие льда сглаживает отличия градиентов для $t = 0$ и $t = \pi/2\omega$.

Вблизи поверхности бассейна изменение характера изолиний над уступом связано практически лишь с уменьшением длины волны. В области конечной глубины уже с удалением от уступа на 0.5 H влияние прибарьерных мод становится незаметным и характер распределения скоростей волновых течений определяется прошедшей волной. При этом рост толщины льда от 0 до 4 м может приводить к уменьшению горизонтальной скорости у поверхности бассейна в пределах 10%.

Распределение изолиний вертикальной составляющей скорости волновых возмущений при $\omega = 1$ с$^{-1}$ в глубоководной области на расстояниях от уступа, превышающих H, для $t = 0$ практически идентично распределению горизонтальной составляющей для $t = \pi/2\omega$. В свою очередь, в момент $t = \pi/2\omega$ распределение $w\,(x, z)$ совпадает с распределением $v\,(x, z)$ в момент $t = 0$ с точностью до знака. В области конечной глубины вертикальная скорость равна нулю на дне бассейна, и поэтому нулевые изолинии не достигают дна, а нулевые практически ортогональны дну. В прибарьерной зоне нулевая изолиния вертикальной скорости для момента $t = 0$ выпукла в сторону глубоководной области. Она обходит уступ по дуге на расстоянии примерно 0.4 H от него. Ближе к уступу изолинии сгущаются, окаймляя вершину уступа. Для момента $t = \pi/2\omega$ влияние прибарьерных мод проявляется в изгибе изолиний w на расстояниях не более 0.3 H от уступа. Количественно для $t = 0$ градиенты вертикальной скорости вблизи уступа меньше градиентов горизонтальной в 1.5 – 2 раза. В момент $t = \pi/2\omega$ вертикальные градиенты скорости могут несколько превышать горизонтальные, оставаясь, однако, меньшими, чем при $t = 0$. Максимальная амплитуда вертикальной составляющей скорости жидких частиц в области конечной глубины меньше максимальных значений для горизонтальной составляющей в пределах 15%. Ледяной покров в этом случае приводит к уменьшению градиентов w вблизи уступа примерно на 50% и усилению затухания возмущений с глубиной. Влияние льда на амплитуду w у поверхности бассейна в области конечной глубины практически незаметно.

С ростом длины набегающей волны влияние ледяного покрова на составляющие скорости ослабевает. Распределение изолиний горизонтальной составляющей скорости волновых течений для $\omega = 0.5$ с$^{-1}$ и $h = 4$ м приведено на рис. 4.2.3. Верхняя и нижняя картины соответствуют моментам $t = 0$ и $t = \pi/2\omega$. В отличие от рис. 4.2.1, 4.2.2 здесь изолинии даны с интервалом 0.05 м·с$^{-1}$. Видно, что в глубоководной области при такой частоте распределения изолиний отличаются от характерных для монохроматической волны. Это обусловлено влиянием отраженной волны. Вклад прибарьерных мод в этом случае начинает сказываться на расстоянии порядка 2.5 H от уступа. Для момента $t = 0$ характерно сгущение практически всех изолиний вблизи уступа, что говорит о возникновении существенных градиентов скорости. На поверхности бассейна ($z = 0$) в области конечной глубины горизонтальная составляющая скорости достигает максимального значения на расстоянии около 0.3 H от линии уступа. С погружением на глубину примерно до 0.7 H это значение почти не меняется. На больших глубинах оно может возрасти. С удалением от уступа по горизонтали влияние прибарьерных мод падает, и уже на расстоянии, равном глубине залегания уступа, распределение v практически полностью определяется характеристиками прошедшей волны.

Для распределения горизонтальной составляющей скорости волновых течений в момент времени $t = \pi/2\omega$ (нижний рисунок) характерен изгиб нулевой изолинии, смещенной в глубоководную область под влиянием прибарьерных мод. Рост градиента этой составляющей вблизи уступа выражен слабее, чем при $t = 0$. На расстоянии 0.5 H от уступа в области конечной глубины прибарьерные моды практически перестают воздействовать на распределение v.

Для распределения горизонтальной составляющей скорости волновых течений в момент времени $t = \pi/2\omega$ (нижний рисунок) характерен

изгиб нулевой изолинии, смещенной в глубоководную область под влиянием прибарьерных мод. Рост градиента этой составляющей вблизи уступа выражен слабее, чем при $t = 0$. На расстоянии 0.5 H от уступа в области конечной глубины прибарьерные моды практически перестают воздействовать на распределение v.

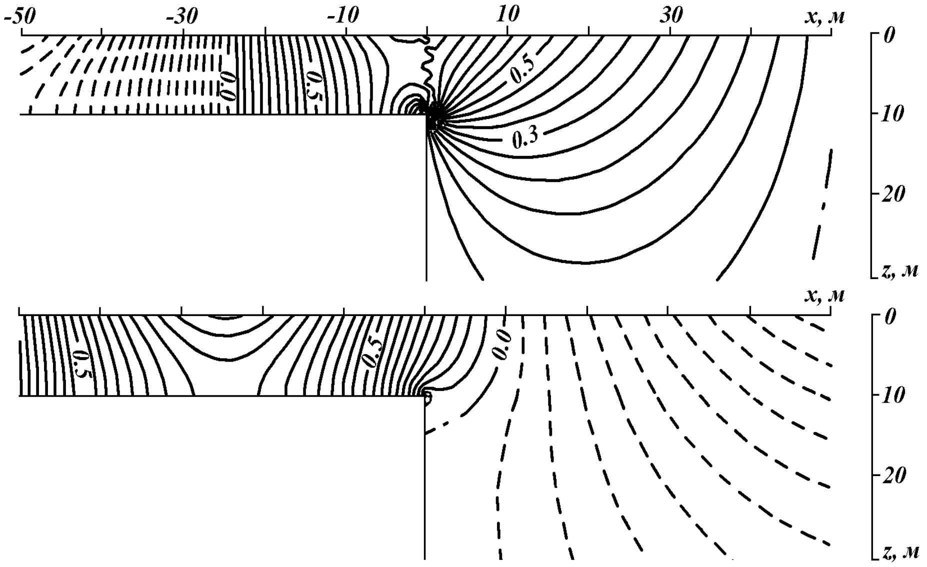

Рис. 4.2.3.

На рис. 4.2.4 (где обозначения те же, что и на рис. 4.2.3) представлены изолинии вертикальной составляющей скорости волновых возмущений для $\omega = 0.5$ с$^{-1}$ и $h = 4$ м. Влияние льда в этом случае выражено слабее, чем для $\omega = 1$ с$^{-1}$. В то же время значительно ярче выражен эффект уступа дна. Так, градиенты вертикальной скорости вблизи уступа для $t = 0$ (верхний рисунок) могут почти в 2 раза превысить градиенты при $\omega = 1$ с$^{-1}$. Нулевая изолиния, начинаясь на поверхности бассейна на расстоянии 0.6 H от линии $x = 0$, удаляется от вертикальной стенки уступа на расстоянии 1.7 H при $z \approx 2.2\ H$. Вдоль линии $x = 0$ вертикальная составляющая скорости примерно до глубины 0.6 H меняется слабо, а затем возрастает с приближением к уступу. В мелководной зоне на расстоянии около 0.7 H от линии $x = 0$ влияние уступа становится практически незаметным. Ледяной покров может уменьшить максимальные значения w лишь в пределах 5%.

В момент $t = \pi/2\omega$ (нижний рисунок) градиент w у уступа почти на порядок меньше, чем при $t = 0$. Он может быть и меньше, чем для $\omega = 1$ с$^{-1}$. На поверхности бассейна в глубоководной области w по модулю достигает максимума приблизительно при $x = 1.3\ H$. На линии $x = 0$ с ростом z величина w сначала убывает практически до нуля (вблизи края уступа), затем (вдоль стенки уступа до глубины $z = 1.4\ H$) возрастает примерно до 0.28 м·с$^{-1}$ при $h = 4$ м и 0.31 м·с$^{-1}$ при $h = 0$. При $z > 1.4\,H$ она убывает. В области конечной глубины на поверхности бассейна влияние уступа связано лишь с уменьшением длины волны. Влияние ледяного покрова на максимальные значения w здесь еще слабее, чем при $t = 0$.

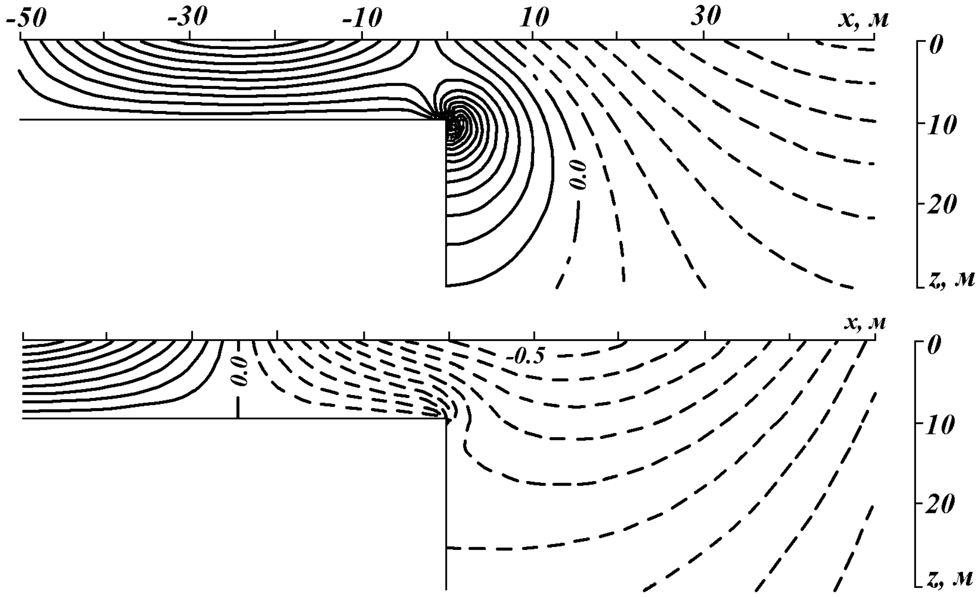

Рис. 4.2.4.

Изолинии амплитуды горизонтальной составляющей скорости при $\omega = 0.5$ с$^{-1}$ приведены на рис. 4.2.5. Верхняя картина дана для $h = 0$, а нижняя – для $h = 4$ м. Видно, что в глубоководной части бассейна величина амплитуды периодически меняется по x. Это является следствием сдвига фазы между падающей и отраженной волнами. Влияние уступа дна на амплитуду v у поверхности бассейна начинает проявляться на расстоянии $x \approx 1.3\,H$. Амплитуда здесь достигает максимума. С приближением к линии $x = 0$ она растет значительно быстрее, чем вдали от уступа. В области конечной глубины на расстоянии H от линии уступа амплитуда v достигает своего максимального на поверхности бассейна ($z = 0$) значения, которое остается постоянным во всей области конечной глубины. Это значение превышает максимум амплитуды на поверхности бассейна в глубоководной области на 25 –30%. Выше уступа на небольшом удалении от него по горизонтали в обе стороны значения амплитуд v мало отличаются от значений v для $t = 0$. В области конечной глубины при $x \approx -H$ все изолинии амплитуды выравниваются, что свидетельствует об исчезновении вкладов в волновую картину всех волновых мод, кроме прошедшей волны, амплитуда которой постоянна по x. Влияние льда качественно не меняет распределение амплитуды v. В области конечной глубины с ростом h может лишь уменьшиться максимальная амплитуда v в пределах 10%. Отметим, что для амплитуды w влияние прибарьерных мод над уступом проявляется менее ярко, чем для амплитуды v. Так, на поверхности бассейна вклад прибарьерных мод заметен в области $-0.5\,H < x < 0.5\,H$, а на глубине залегания уступа – при $0 \le x < 1.2\,H$.

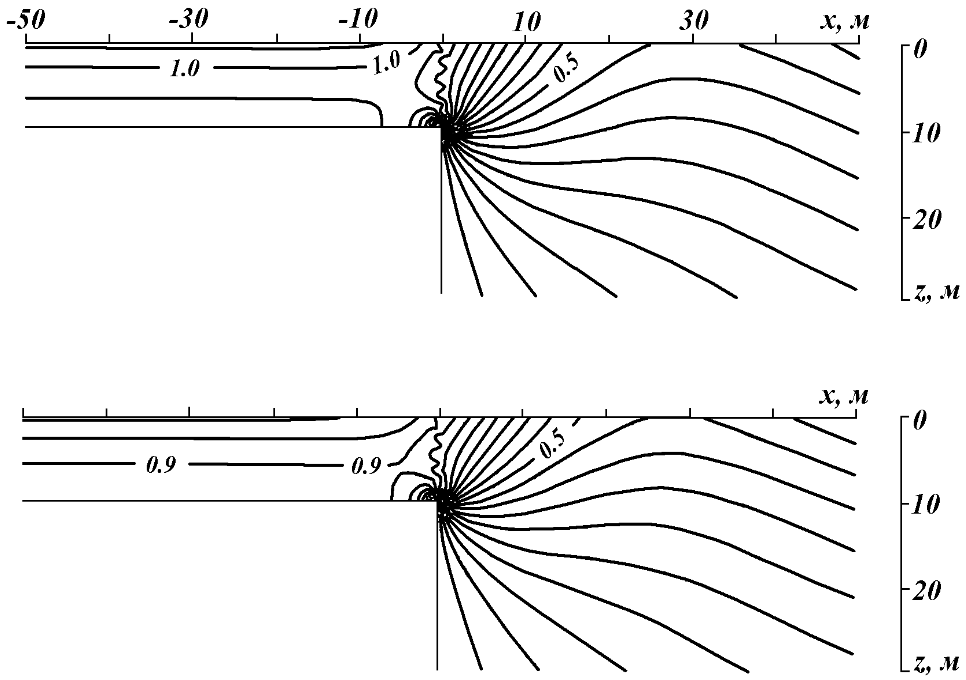

Рис. 4.2.5.

С ростом ω влияние уступа на амплитуды составляющих скорости волновых течений убывает. Так, для $\omega = 1$ с$^{-1}$ амплитуды как v, так и w на глубинах вплоть до 0.5 H практически не меняются с переходом через уступ в области конечной глубины. Влияние льда в этом случае проявляется лишь в слабом (до 5%) уменьшении амплитуд в области конечной глубины у поверхности бассейна и усилении их затухания с глубиной.

Рассмотрим в заключение векторное поле скорости волновых течений. Для $\omega = 0.5$ с$^{-1}$ и $h = 4$ м оно представлено на рис. 4.2.6. Стрелками показаны величины скорости (масштаб длины, соответствующий скорости 1 м·с$^{-1}$, указан) и направления волновых течений. Верхняя картина отвечает моменту $t = 0$, а нижняя – моменту $t = \pi/2\omega$. Заменой направлений векторов на противоположные можно получить поля волновых течений соответственно для моментов $t = \pi/\omega$ и $t = 3\pi/2\omega$.

Видно, что при $t = 0$ поле скорости в глубоководной области под влиянием уступа начинает деформироваться приблизительно на расстоянии 1.5 H от него. Особенно это заметно на глубине залегания уступа. При $t = \pi/2\omega$ деформация поля выражена слабо. Вблизи поверхности бассейна течение вертикально направлено не на линии $x = 0$, как это было при постоянной глубине бассейна, а примерно на расстоянии 0.9 H от нее. Это можно объяснить изменением длины волны при прохождении уступа. В области конечной глубины волновое течение, характерное для прошедшей монохроматической волны, устанавливается примерно на расстоянии 0.7 H от линии $x = 0$.

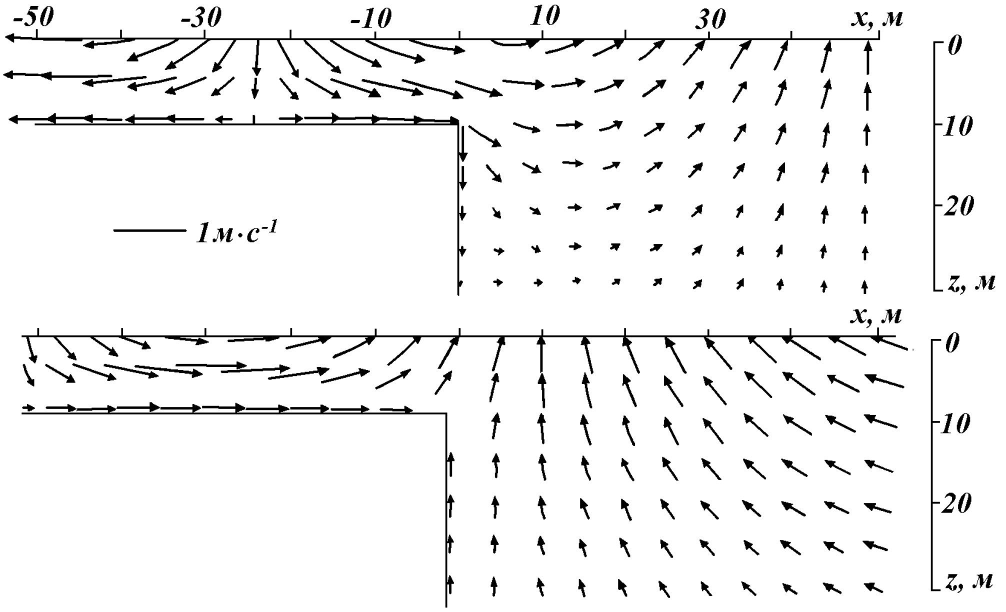

Рис. 4.2.6.

Для бассейна со свободной поверхностью в аналогичных условиях при $t = 0$ искажение поля скорости можно заметить на несколько большем (до 2 H) расстоянии от уступа. Следовательно, ледяной покров ослабляет влияние прибарьерных мод. Кроме того, величины скоростей волновых течений в прибарьерной области уменьшаются на 10–15% с ростом h от 0 до 4 м. В таких же пределах проявляется влияние льда и на величины скоростей волновых течений у поверхности бассейна в области конечной глубины.

С ростом частоты падающей волны действие уступа дна ослабевает. Для частот, превышающих 1.2 c^{-1}, имеет место лишь уменьшение длины волны под влиянием плавающего льда.

Таким образом отметим, что влияние ледяного покрова проявляется в ослаблении горизонтальных и вертикальных градиентов скорости волновых течений вблизи уступа. Чем меньше период падающей волны, чем эффект проявляется более заметно. Ледяной покров уменьшает также скорости волновых течений и у поверхности бассейна, усиливает затухание волновых возмущений с глубиной и ослабляет влияние прибарьерных мод на формирование поля волновых течений.

4.3. Трансформация ветровых волн при выходе на мелководье

В связи с расширяющейся хозяйственной деятельностью в районах шельфовой зоны морей представляется важным изучение трансформации ветрового волнения, пришедшего из глубоководной части моря, на участках с резким изменением глубины бассейна, а также спектральных характеристик ветровых волн на мелководье. В настоящее время для расчёта волновых характеристик используются многочисленные эмпирические и полуэмпирические модели, отличающиеся простотой в использовании и дающие в определённых условиях удовлетворительные результаты предсказания параметров ветровых волн. Так, в частности, обстоит дело с достаточно хорошо изученными спектрами ветровых волн на глубокой воде. В работах [49, 55, 71, 141, 150, 168] отражены основные закономерности развития глубоководных спектров ветровых волн в зависимости от условий их образования. Спектры ветровых волн на мелкой воде [71, 92, 127, 140, 166, 167, 170] по своей структуре отличаются от глубоководных аналогов. Они изучены в гораздо меньшей степени [166].

В большинстве случаев модели описывают развитие ветрового волнения при горизонтально однородном рельефе дна. Решение задачи о трансформации глубоководного спектра при выходе его в зону резкого свала глубины, учитывающее энергетические потери прошедших волн, представляется в общем случае достаточно сложным и громоздким. Изменение ветровых волн под влиянием плавно уменьшающейся глубины рассмотрены в [71, 42, 43, 97, 75]. Получены теоретические соотношения для определения спектрально-статистических характеристик волнения в прибрежной мелководной зоне, основанные на применении оптических законов к явлению распространения прогрессивной волны на поверхности жидкости переменной глубины. В этом случае спектр возвышений морской поверхности в рассматриваемой точке представлен в виде

$$S(\omega) = S_0(\omega) \cdot \Phi_1(\omega, D), \quad \Phi_1 = \frac{1}{2}\frac{g^2 k}{\omega^3}\left(\frac{d\omega}{dk}\right)^{-1}. \tag{4.3.1}$$

Здесь $S_0(\omega)$ – исходный глубоководный спектр, D – глубина, Φ_1 – коэффициент, учитывающий изменения спектра при выходе на мелководье и определяющийся путём приравнивания потока энергии спектральной составляющей на глубокой и мелкой воде; k – волновое число, выражающееся через частоту ω посредством дисперсионного уравнения

$$\omega^2 = gk \cdot \mathrm{th} kD, \tag{4.3.2}$$

где g – ускорение свободного падения. Для бассейна с битым льдом $\omega^2 = qk \cdot \mathrm{th} kD/(1+\kappa kg\,\mathrm{th}\,kD)$, а κ имеет тот же вид, что в (4.13). В [146] выведено теоретическое соотношение

$$S(\omega) = S_0(\omega) \cdot \Phi_2(\omega, D),$$

$$\Phi_2 = \mathrm{th}^2 K \cdot \left(1 + \frac{2K}{\mathrm{sh}\,2K}\right),\ K = \frac{\omega^2 D/g}{\mathrm{th}^2\left(\omega^2 D/g\right)} \qquad (4.3.3)$$

между спектрами на глубокой $S_0(\omega)$ и мелкой $S(\omega)$ воде. Существует также ряд моделей, основанных на численном решении уравнения баланса волновой энергии. В случае нормального относительно изобат подхода волн к берегу это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial(Ec_g)}{\partial x} = -(G_1 + G_2), \qquad (4.3.4)$$

где E – энергия волн; c_g – их групповая скорость; G_1, G_2 – диссипация за счет обрушения гребней и придонного трения соответственно. На основе его решения строятся так называемые балансовые модели. В качестве одного из примеров таких моделей можно привести предложенную в [83] обобщённую модель прибойной зоны, где уравнение типа (4.3.4) решается численно совместно с уравнением сохранения волнового импульса. Здесь предложен объединённый коэффициент диссипации B, учитывающий возможные источники потерь энергии волн в прибойной зоне [36]. Он найден путём настройки по известному решению для плоского наклонного дна. В результате получена зависимость B от коэффициента затухания $\gamma=H/D$ (H – высота волны) и глубины на мористой границе внутренней прибойной зоны. При этом показано, что на пологих откосах коэффициент диссипации B велик, а на крутых откосах – мал. Это даёт основание рассмотреть соотношение глубоководного и вышедшего на крутой склон спектров ветровых волн в виде

$$S(\omega) = S_0(\omega) \cdot \Phi_3(\omega, D), \qquad (4.3.5)$$

где функция Φ_3 не зависит от диссипативных факторов, а учитывает трансформацию спектра вследствие отражения волн от неоднородности рельефа дна. Она может быть определена из решения гидродинамической задачи о набегании монохроматических волн на уступ дна и при использовании метода волнового источника [153, 28] принимает вид:

$$\Phi_3 = \left|\frac{u_0}{k}\right| \mathrm{ch} \cdot kD. \qquad (4.3.6)$$

Здесь k – действительный положительный корень дисперсионного уравнения (4.3.2); u_0 – координата комплексного вектора $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ решения алгебраической системы

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \left[\frac{\Lambda^2 e^{-2\Lambda D}\left[\pi i - \overline{Ei}(2\Lambda D)\right]}{\pi(\Lambda^2+k_l^2)(\Lambda^2+k_n^2)} + Z(k_l,k_n) \right] = -\frac{\Lambda e^{-\Lambda D}}{\Lambda^2+k_l^2}, \quad l = 1, 2, \ldots$$

$$Z(k_l,k_n) = \frac{1}{2\pi(k_l^2-k_n^2)}\left[\ln\frac{k_n^*}{k_l^*} + Ci(2k_l^* D) - Ci(2k_n^* D) \right] \quad \text{для} \quad l \neq n,$$

$$Z(k_l,k_n) = \left(D - \frac{\Lambda}{\Lambda^2+k_l^2} \right)\left(\frac{Si(2k_l^* D)}{2\pi k_l^*} + \frac{1}{4k_l} \right) - \frac{\Lambda^2}{2\pi k_l^2(\Lambda^2+k_l^2)} \quad \text{для} \quad l = n,$$

где $\Lambda = \omega^2/g$, ω – частота падающей на уступ волны, $k_0 = -ik$; k_n (n = 1, 2, …) – абсолютные величины мнимых корней уравнения (2) в порядке возрастания; $\overline{Ei}(x)$, $Si(x)$, $Ci(x)$ – соответственно интегральная показательная функция, интегральный синус и интегральный косинус; звёздочка означает комплексно-сопряжённую величину.

Для оценки согласованности теоретических спектров с данными натурных наблюдений были использованы результаты измерений, проведенных на морском экспериментальном полигоне Морского гидрофизического института [57]. Измерительная аппаратура была установлена на расстоянии 300 метров от берега, где глубина составляла 15 метров. Удаление от берега внешней мористой границы зоны, где происходит первое обрушение волн [83], составляет около 2 км. Во время наблюдений скорость ветра (10–12 м/с) и его направление (в диапазоне 100°–110°) были устойчивы, по крайней мере, в течение 6–7 часов. Хотя полученные экспериментальные спектры нельзя отнести к спектрам полностью развитого волнения (для них безразмерная продолжительность $\tilde{T} = Tg/U \approx 2 \cdot 10^4$ и ориентировочная оценка безразмерного разгона $\tilde{X} = gX/U^2 \sim 10^3 \div 10^4$), тем не менее при $U \approx 11.8$ м·с$^{-1}$, f_0 = 0.175 Гц и $\alpha = 1.25 \cdot 10^{-2}$ формула Пирсона-Московитца

$$S(\omega) = \alpha g^2 \omega^{-5} \cdot \exp\left[-\frac{5}{4}\left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^4 \right] \qquad (4.3.7)$$

достаточно хорошо согласуется с экспериментальными спектрами $S(\omega)$ [57]. Поэтому в дальнейшем спектр вида (4.3.7) мы будем использовать в качестве экспериментального для сопоставления его с различными модельными спектрами и обозначать на рисунках линией с центральными символами.

Для учёта эффекта конечности глубины бассейна и изучения отклонения ветровых волн на мелкой воде от их глубоководных аналогов в [167] предложена форма спектра

$$\tilde{S}(\tilde{\omega}) = \frac{1}{0.87^n}(1.329 - 1.503\eta)\left(R^2 - 1\right)\tilde{\omega}^n, \quad 0 \le \tilde{\omega} \le 0.87$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\tilde{\omega}) &= 6.770 - (5.813 - 5.137\eta)\left(R^2 - 1\right) - \\ &- \left[715.67 - (780.909 - 721.68\eta)\left(R^2 - 1\right)\right](\tilde{\omega} - 1)^2 + \\ &+ \left[697.50 - (802.12 - 719.96\eta)\left(R^2 - 1\right)\right](\tilde{\omega} - 1)^3 + \\ &+ \left[19264 - (21766 - 20033\eta)\left(R^2 - 1\right)\right](\tilde{\omega} - 1)^4 - \\ &- \left[36518 - (43128 - 38143\eta)\left(R^2 - 1\right)\right](\tilde{\omega} - 1)^5, \; 0.87 \le \tilde{\omega} \le 1.15, \end{aligned} \qquad (4.3.8)$$

$$\tilde{S}(\tilde{\omega}) = 1.15^m (1.307 - 1.426\eta)\left(R^2 - 1\right)\frac{1}{\tilde{\omega}^m}, \quad \tilde{\omega} \ge 1.15$$

где в качестве параметров, кроме момента нулевого порядка m_0, частоты максимума ω_0 и частотного соотношения R вводится безразмерный параметр $\eta = \overline{H}/D$, $\overline{H}$ – средняя высота волны. Здесь $n = 6(1+\eta)$, $m = 2(2 - \eta)$ – эмпирические коэффициенты, описывающие влияние глубины на низкочастотный и высокочастотный интервалы спектра соответственно. Для частотного соотношения R и пикового коэффициента P ($\tilde{S}(1) = P$) предложены следующие соотношения

$$R^2 - 1 = \frac{6.770 - P}{5.813 - 5.137\eta};$$

$$P = \left(17.58 - 53.47\eta + 93.93\eta^2\right)\tilde{X}^{-0.233}\,\mathrm{th}^{-2/3}\left(30\frac{\tilde{D}^{0.8}}{\tilde{X}^{0.35}}\right). \qquad (4.3.9)$$

Формула (4.3.8) получена для диапазона глубин от бесконечности ($\eta = 0$) до глубины начала разрушения волны ($\eta = 1/2$) в предположении, что критерием обрушения является $H_{1/3}/D = 1.27$. В условиях полностью развитого волнения (индекс m) для случаев бесконечно глубокой (индекс d) и предельно мелкой (индекс s) воды получены следующие значения характерных комплексов:

$$\eta = 0; \quad n = 6; \quad m = 4; \quad R_{\mathrm{md}} = 1.378; \quad P_{\mathrm{md}} = 1.538; \qquad (4.3.10)$$
$$\eta = 1/2; \quad n = 9; \quad m = 3; \quad R_{\mathrm{ms}} = 1.643; \quad P_{\mathrm{ms}} = 1.255.$$

На рис. 4.3.1 приведены теоретические спектры полностью развитого волнения для глубоководья (спектр 1) и для воды постоянной конечной глубины $D = 15$ м (спектр 2) при скорости ветра $U = 11.8$ м·с$^{-1}$, соответствующей условиям эксперимента [57], а также экспериментальный спектр 3. Для расчёта спектров 1, 2 использованы величины продолжительности ветра T_m ~ 30 ч. и длины разгона X_m ~ 500 км, отвечающие условиям полного развития волнения на глубокой воде. Некоторые спектрально-статистические характеристики модельных спектров даны в табл. 4.3.1. Приведенные данные иллюстрируют описанный в [57] факт неполного развития спектра, измеренного на экспериментальном полигоне.

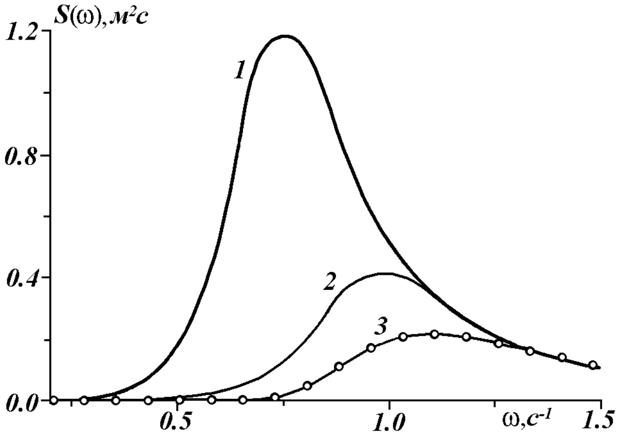

Рис. 4.3.1.

Таблица 4.3.1.

Спектры №	$\tilde{X}$	η	n	m	P	R	m_0	ω_0	$S(\omega_0)$	$\overline{H}$	$H_{1/3}$
1	$3.5\cdot10^4$	0	6	4	1.538	1.378	0.58	0.754	1.18	1.91	3.05
2	$3.5\cdot10^4$	0.085	6.507	3.831	1.571	0.967	0.257	0.989	0.41	1.27	2.03

Для оценки возможных параметров волнения, пришедшего со стороны открытого моря на внешнюю мористую границу прибойной зоны, построим глубоководный спектр при $U = 11.8$ м·с$^{-1}$, T = 7 часов и X = 75 км. Принятая величина разгона X определена по формуле [167]

$$\frac{gT}{U} = 29.8\left(\frac{gX}{U^2}\right)^{0.767} . \qquad (4.3.11)$$

Этот спектр изображен линией 1 на рис. 4.3.2. Линией 4 здесь показан спектр для таких же характеристик ветра, но описывающий волнение на воде конечной глубины D = 15 м. Величина разгона X волн, найденная по формуле [167]

$$\frac{gT}{U} = \frac{29.8}{\mathrm{th}1.4kD}\left(\frac{gX}{U^2}\right)^{0.767},$$

составляет в этом случае приблизительно 45 км. Экспериментальный спектр, как и прежде, обозначен линией 3. Спектрально-статистические характеристики экспериментального (3) и теоретических (1, 2, 4–7) спектров даны в табл. 4.3.2. Сопоставление характеристик спектров 1 и

3 позволяет заключить, что нулевой момент глубоководного спектра меньше, а мода несколько выше, чем у измеренного на мелководье. Однако известно, что в прибойной зоне, как правило, средние высоты волн уменьшаются, а частота спектрального максимума растет с уменьшением глубины бассейна. Следовательно, можно предположить, что разгон волн на глубоководье имел несколько большее значение, чем полученное по формуле (11). Одним из объяснений этому может быть наличие волнения в открытой части моря до момента начала отсчёта времени *T*. Линией 2 на рис. 4.3.2 представлен глубоководный спектр с разгоном $X \sim 100$ км. Эта величина разгона выбрана в предположении, что частота пика спектра 2 по крайней мере не превышает частоту пика спектра 3 и согласуется с оценкой интервала возможных разгонов [57] для экспериментального спектра. Из рисунка видно, что спектр 3 шире и ниже глубоководного спектра 2. Это является свидетельством трансформации волнения при выходе на малую глубину. Однако спектральная энергия и частота пика, измеренного на глубине $D = 15$ м спектра заметно превышают величины этих же спектральных характеристик для мелководного спектра на постоянной глубине $D = 15$ м (спектр 4) при аналогичных условиях ветра. Поскольку расстояние от внешней мористой границы прибрежной зоны до места измерения относительно невелико (~1.7–2 км), то спектр 3 скорее всего представляет собой суперпозицию трансформированного крутым склоном дна глубоководного спектра 2 и спектра волнения, развивающегося на мелководье. На рис. 4.3.3, *а* штриховой, штрихпунктирной и пунктирной линиями для $D = 15$ м представлены передаточные функции Φ_i ($I = 1, 2, 3$), учитывающие влияние глубины воды на форму спектра и рассчитанные по моделям (4.3.1), (4.3.3) и (4.3.5) соответственно. Видно, что передаточные функции в области больших частот практически совпадают между собой. На малых частотах наблюдаются их существенные различия, что, по-видимому, связано с отсутствием в выражениях для Φ_1 и Φ_3 диссипативных членов. Кроме того, Φ_1 и Φ_3, как функции частоты колебаний имеют по одному минимуму, величины которых близки между собой. Однако, при фиксированной глубине воды $\Phi_3(\omega)$ достигает своего минимума на меньшей частоте, чем $\Phi_1(\omega)$. Это иллюстрирует рис. 4.3.3, *б*, где штриховой и пунктирной линиями изображены зависимости частоты минимума ω^* от глубины бассейна *D* для Φ_1 и Φ_3 соответственно. Мелководные спектры ветровых волн, полученные в результате преобразования глубоководного спектра 2 передаточными функциями $\Phi_{1\text{-}3}$ представлены на рис. 4.3.2 кривыми 5–7.

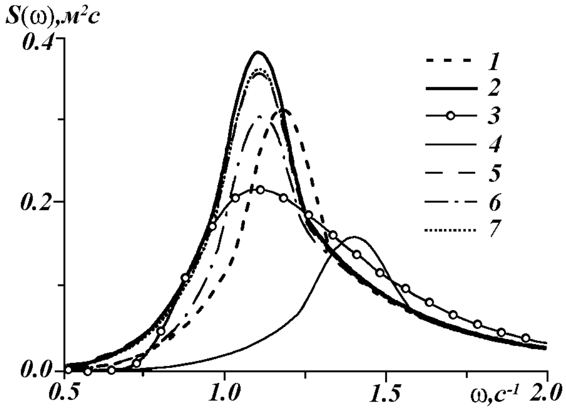

Рис.4.3.2

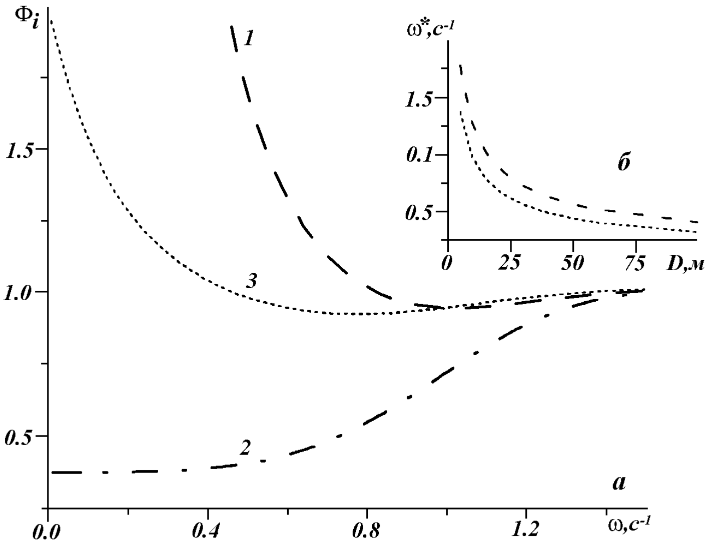

Рис. 4.3.3.

Таблица 4.3.2.

Спектры №	m_0	ω_0	$S(\omega_0)$	$\Phi(\omega_0)$	$\overline{H}$	$H_{1/3}$
1	0.154	1.173	0.313	–	0.98	1.57
2	0.188	1.097	0.383	–	1.09	1.73
3	0.164	1.1	0.214	–	1.02	1.62
4	0.091	1.398	0.159	–	0.76	1.21
5	0.181	1.099	0.357	0.935	1.07	1.7
6	0.156	1.11	0.305	0.792	0.99	1.58
7	0.18	1.1	0.363	0.949	1.06	1.7

В отличие от случая глубокой воды, где высоты волн определяются продолжительностью и скоростью ветра, ветровые волны на мелкой воде часто ограничиваются в своём развитии глубиной воды. Среднюю высоту одной трети наиболее высоких волн на мелкой воде можно определить, используя, в частности, формулу

$$\frac{gH}{U^2} = 0.112\left(\frac{gD}{U^2}\right)^{3/5}, \tag{4.3.12}$$

полученную в работе [92]. Заметим, что эта формула применима для случая, когда волны обрушаются только вследствие ограничительного эффекта D, и поэтому представляет экстремальные условия. На основе эмпирической зависимости роста высоты волны от разгона с учётом формулы (4.3.12) в [167] предложена безразмерная высота значительных волн на мелководье

$$\tilde{H} = 5.5\cdot 10^{-3}\,\tilde{X}\ \mathrm{th}\left(30\,\frac{\tilde{D}^{0.8}}{\tilde{X}^{0.35}}\right), \tag{4.3.13}$$

где $\tilde{D} = gD/U^2$ – безразмерная глубина бассейна. На рис. 4.3.4 дана гистограмма высот значительных волн некоторых из обсуждаемых спектров. В качестве базовой выбрана высота волны (4.3.12) на глубине D = 15 м. Для спектра 4 расчёт произведен по формуле (4.3.13). Цифрами обозначены выраженные в процентах отношения высот волн соответствующих спектров к высоте из (4.3.12). Из рисунка видно, что высоты значительных волн, измеренные в эксперименте (спектр 3), близки к критической высоте (12) для данной глубины бассейна. Это свидетельствует в пользу вывода о малости коэффициента диссипации на крутых свалах глубин [83].

Таким образом, отметим, что максимум спектральной плотности модельного спектра, построенного с использованием гидродинамической модели набегания монохроматических волн на уступ дна, превышает величину максимума спектра, измеренного в удалённой от уступа прибрежной зоне. Измеренный спектр несколько шире модельного, трансформированного уступом. Спектр, моделирующий развивающееся волнение при аналогичных условиях ветра на мелкой воде, содержит меньшую спектральную энергию и имеет большую частоту пика, чем спектр, измеренный в прибрежной зоне.

Учёт в теоретических моделях отражения волн при прохождении ими участка с большим уклоном дна не приводит к существенным изменениям глубоководного спектра. При этом уменьшение спектральной энергии составляет около 5%.

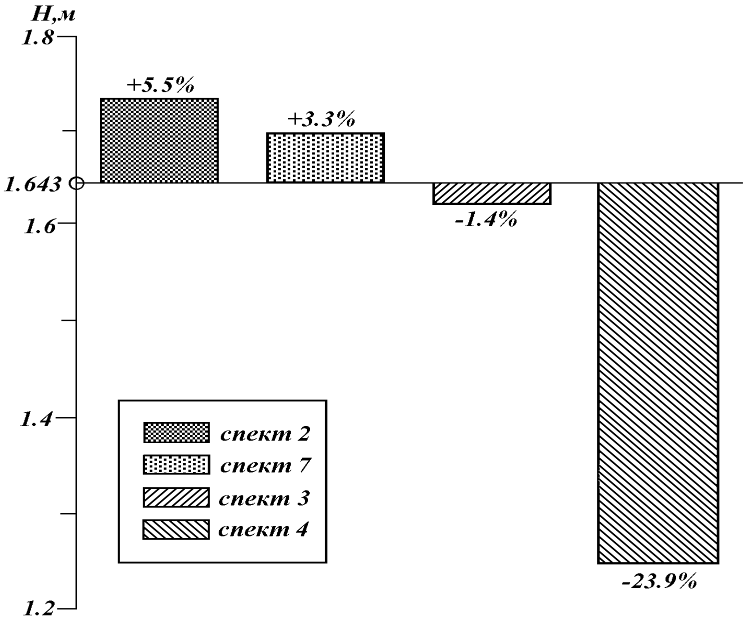

Рис. 4.3.4.

ГЛАВА 5. ВЛИЯНИЕ ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА НА ВОЛНОВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В АЗОВСКОМ МОРЕ

5.1. Особенности ледового режима Азовского моря

В зимний сезон Азовское море частично или полностью покрывается льдом [9, 53, 54, 82], что затрудняет, а в ряде случаев исключает осуществление контроля за динамическим состоянием бассейна традиционными методами на протяжении длительного временного промежутка. Это обусловливает целесообразность анализа имеющихся натурных данных о ледовом режиме с целью определения его информативных характеристик, необходимых при разработке гидродинамических моделей, диагноза и прогноза динамических процессов под ледяным покровом.

Главным показателем ледового режима является ледовитость. Она представляет собой степень покрытия льдом акватории моря или какой-то ее части, выраженная в процентах или квадратных километрах. Как правило, в декабре ледовитость моря в среднем равна 15%, хотя бывают и зимы, когда лёд в этом месяце отсутствует [72]. От декабря к январю лед быстро распространяется на юг и занимает около половины акватории моря. В январе ледовитость колеблется от 10 до 90 %. От января к февралю ледовитость продолжает увеличиваться, но не так быстро, как в предыдущем месяце. Наблюдались зимы, когда ледовитость в январе была большая, чем в феврале. От февраля к марту ледовитость уменьшается в среднем на 25 %, от марта к апрелю – до 65 %. В апреле чаще всего льда в море не бывает.

Для Азовского моря характерно ярко выраженная, близкая к функциональной зависимости, связь ледовитости с кромкой льда. Она объясняется спецификой самого моря, его малыми размерами и почти полной замкнутостью. Такие особенности водоема обеспечивают благоприятные условия для ледообразования и практически несущественного выноса льда в соседнее море. Это в целом способствует повышению связи общего количества льда (ледовитости) с параметрами его распределения (с положением внешней кромки льда).

Ледовитость а, следовательно, и положение внешней кромки льда в Азовском море могут изменяться от года к году в больших пределах. Многолетняя изменчивость этих характеристик ледового режима также весьма значительная. Ледовитость одной зимы (в целом) может в 15 раз превышать ледовитость другой. Какой-либо определенной закономерности в последовательности зим разной суровости на Азовском море не выявлено. Обеспеченность очень суровых зим (с ледовитостью более 26 тыс. км^2) составляет около 25 %. Примерно такова же обеспеченность очень мягких и малоледных зим (с ледовитостью менее 8 тыс. км^2). Таким образом, в каждую конкретную зиму ледяной покров формируется своеобразно, иногда с существенными отклонениями от нормы.

Первостепенная роль в образовании льда принадлежит атмосферным макропроцессам, их сезонным и межгодовым особенностям. Экстремально суровые зимы и тяжелые ледовые условия в бассейне Азовского моря возникают при преобладании в осенне-зимний период меридионального характера атмосферной циркуляции над северной Атлантикой и Европой. Экстремально теплые зимы и легкие ледовые условия обязаны ослаблению указанных процессов и усилению зональной циркуляции. Кроме того, решающая роль в формировании различных по суровости зим и ледовых условий на Азовском море принадлежит атмосферным процессам предшествующего сезона предзимья (с начала октября до начала января).

Кратковременные колебания ледовитости определяются изменениями в текущей погоде, возникающими при смене естественных синоптических периодов. Они закономерны и подчиняются направленности атмосферных процессов.

Наименьшая устойчивость ледовитости Азовского моря наблюдается от декабря к январю, поскольку этот период переходный от сезона предзимья к зиме. Для него характерна неустойчивость атмосферных процессов и их гидрологических проявлений. В течение остальной части ледового периода ледовитость сохраняет высокую устойчивость, хотя редкие исключения возможны.

Изменения в положении внешней кромки льда в течение ледового периода сезона подобны изменениям ледовитости. Кромка льда и ледовитость взаимосвязанные характеристики ледяного покрова и их изменения обусловливаются одинаковыми причинами [72]. Согласно средним многолетним данным, которые являются нормой, в середине декабря кромка льда на подходе к порту Мариуполь, обычно располагается в 27–36 км от берега. В течение следующего месяца (к 15 января) средняя кромка спускается к югу еще на 45–54 км. От января к февралю она также смещается к югу ещё примерно на 23–27 км. Таким образом, к середине февраля (максимум развития ледяного покрова) кромка льда в среднем отстоит от северного берега данной зоны на расстоянии 90–117 км.

Изменение кромки льда в течение каждого месяца ледовитого сезона (кратковременные изменения) весьма неравномерны по времени и величине и, подобно соответствующим колебаниям ледовитости, полностью определяются текущей сменой погодных условий над морем. Отметим, что устойчивость кромок льда в открытых районах моря выше, чем вблизи берегов. Это объясняется искажающим влиянием берегов на кромку. Сравнительно тесные связи среднемесячных кромок льда в январе - марте позволяют с большой вероятностью судить о положении кромки льда в будущем месяце по ее значению за предшествующий месяц.

Ледовитость и кромка льда дают представление о горизонтальном распространении льда по площади моря. Толщина льда позволяет судить о вертикальной мощности ледяного покрова и тем самым уточняет понятие ледовитости. В умеренные зимы на севере Азовского моря средняя толщина льда в припае составляет в январе 20–30 см., в феврале 30–40 см. и в марте 30–45 см. Средняя толщина плавучих льдов в открытом море всегда меньшая. Преобладающая толщина плавучих льдов на трассе Керченский пролив-порт Мариуполь в январе и в феврале равна 15–20, 15–25 см. В суровые зимы толщина льда в открытом море составляет в среднем 40–50 %, а в умеренные – 50–60 % от толщины припая. Меньшая толщина льда в открытом море объясняется рядом причин. Главными из них являются более поздние сроки начала ледообразования в открытом море вследствие большего теплозапаса вод и наличие постоянного выноса льдов из районов его образования.

Небольшие толщины льда открытого моря, продолжительные (до 10 суток и более) штормовые ветры (7–10 м/с с усилениями до 20 м/с) и мелководность моря создают благоприятные условия для процессов торошения [98]. Торосистые льды занимают значительные площади, особенно в суровые и экстремально суровые зимы. В нормальные зимы в открытой части моря преобладает лед толщиной 15 см. Поэтому в такие зимы наиболее вероятная максимальная высота ледяных бугров и барьеров не более 8 м над уровнем моря. В суровые и экстремально суровые зимы высота бугров достигает 14 м (толщина льда в открытом море 25 см и более).

Анализ ежегодных данных о распределении сроков очищения ото льда по 13 пунктам Азовского моря за 30-летний период (1951–1980) показал [73], что очищение моря начинается большей частью на юге, в районе Керченского пролива. Затем распространяется на север и заканчивается в западной и восточной частях моря, в Таганрогском заливе и Гнилом море. Западные районы Азовского моря характеризуются наибольшим ледонакоплением за зиму и, следовательно, наиболее поздними средними многолетними сроками очищения. На основании данных о средней декадной толщине льда в 8 пунктах за период 1951–1980 гг получены скорости таяния льда (в см/сут) от даты максимальной за зиму толщины льда, отнесенной к середине декады, до даты очищения. Средняя скорость таяния имеет большее значение в Таганрогском заливе, что объясняется влиянием близкой суши на энергетику таяния льда в заливе. Максимальное значение получено для Мариуполя (залив) –

1.28 см/сут, минимальное – для Темрюка – 0.79 см/сут. Поле скорости таяния льда в южных районах Азовского моря, прилегающих к Керченскому проливу и устьям крупных рек, является неоднородным и статистически более изменчивым. Центральные и северные части моря характеризуются большей однородностью.

5.2. Влияние ледового режима на фазовую структуру поверхностных волн

Ледяной покров, являющийся важным компонентом гидрологического режима Азовского моря в зимний период, существенно изменяет характер поверхностного волнения. В общем движении по вертикали участвуют и плавающий лед, и масса воды под ним. Вид поверхностного волнения будет зависеть от массы льда, его упругости и сил взаимодействия между льдинами. С другой стороны, сами волны во многом определяют процессы, происходящие в ледяном покрове. Их воздействием можно объяснить разрушение льда в открытом море, взламывание припая и т.п.

По реакции на вертикальные колебания ледяной покров разделяется на сплошной и битый. Это разделение достаточно условно. К сплошным относятся поля и обломки полей, горизонтальные размеры которых намного превосходят длину волны. В битых льдах размеры льдин считаются малыми по сравнению с длиной волны, а их вертикальные перемещения отслеживающими профиль взволнованной поверхности воды. В натурных условиях встречаются и промежуточные случаи.

Рассмотрим влияние льда на фазовые характеристики поверхностных волновых возмущений. Дисперсионное соотношение, связывающее частоту σ и волновое число r изгибно-гравитационных волн в покрытой сплошным упругим льдом жидкости конечной глубины H, имеет вид [3–5]

$$\sigma^2 = \frac{D_1}{\chi} rg \operatorname{tg} rH \tag{5.2.1}$$

где $D_1 = Dr^4 + 1$, $\chi = 1 + \kappa rg \operatorname{tg} rH$; $D = \dfrac{Eh^3}{12\rho g\left(1-\nu^2\right)}$, $\kappa = \dfrac{\rho_1 h}{\rho g}$; E, h, ρ_1, ν – модуль нормальной упругости, толщина, плотность и коэффициент Пуассона льда, ρ – плотность воды.

Дисперсию фазовой скорости распространения волновых возмущений определим из формулы

$$\upsilon = \sqrt{\frac{gD_1}{r\chi} \operatorname{tg} rH}\,. \tag{5.2.2}$$

Из (5.2.1), (5.2.2), полагая E = 0, получим выражения для частоты и фазовой скорости волн в случае битого (D = 0) льда без учета взаимодействия между отдельными льдинами (разреженный ледяной покров). Тогда выражение (1) можно переписать в виде $rg\,\mathrm{th}\,rH = \sigma^2 / \left(1 - \kappa\sigma^2\right)$. Видно, что при $\sigma > 1/\sqrt{\kappa}$ дисперсионное уравнение не имеет действительных положительных корней. Следовательно, в жидкости с плавающим битым льдом прогрессивные волны с частотой, превышающей $\sigma_0 = 1/\sqrt{\kappa}$, распространятся не могут [117, 156]. При стремлении σ к σ_0 длина волны и фазовая скорость стремятся к нулю.

Для количественной оценки влияния льда на фазовые характеристики поверхностных волн проводились численные расчеты для 14 точек в Азовском море при значениях параметров

$$\rho_1 = 870\ \text{кг/м}^3,\ E = 3{\cdot}10^9\ \text{Н/м}^2,\ \upsilon = 0,34. \qquad (5.2.3)$$

Расположение этих точек по акватории моря показано на рис.5.2.1, а в табл.5.2.1 приведены глубина и плотность воды, средняя многолетняя толщина льда, а также средние периоды и высоты волн в каждой из рассматриваемых точек для преобладающего в зимний сезон северо-восточного ветра [6] со скоростью 10 – 15 м/с. Расчеты выполнялись для бассейна с открытой поверхностью (h = 0) и для бассейна с плавающим битым ($E = 0,\ h \neq 0$) или сплошным упругим ($E \neq 0,\ h \neq 0$) льдом.

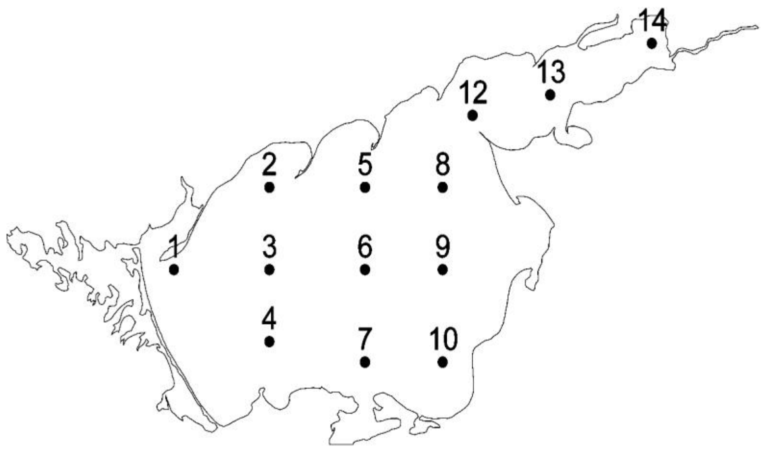

Рис. 5.2.1

Анализ численных результатов показал, что битый лед уменьшает фазовую скорость $\upsilon = \sigma/r$ и длину $\lambda = 2\pi/r$ гравитационных поверхностных волн по сравнению с соответствующими характеристиками для бассейна с открытой поверхностью. Однако эти изменения менее значительны, чем изменения, вносимые сплошным упругим ледяным покровом. Для сравнения в табл. 5.2.2 приведены значения длин и фазовых скоростей поверхностных волн при различных ледовых условиях, указанных в табл. 5.2.1. Более значительное влияние сплошного льда объясняется тем, что кроме сил инерции и тяжести, действует и восстанавливающая сила упругости. Она обусловливает увеличение длинны и фазовой скорости волны. Кроме того, фазовая скорость как функция волнового числа в случае сплошного льда имеет минимум $\upsilon = \upsilon_1$, разделяющий ее дисперсионную зависимость на две ветви. Одна из них гравитационная, а вторая – изгибно-гравитационная. Следовательно, волновые возмущения в покрытом сплошным льдом бассейне не могут распространяться со скоростью $\upsilon < \upsilon_1$. Волны, соответствующие убывающей ветви, имеют характер гравитационных. Их фазовая скорость изменяется в приделах $\upsilon_1 < \upsilon < \sqrt{gH}$. Возрастающая ветвь представляет изгибно-гравитационные волны, параметры которых существенно зависят от изгибной жесткости ледяного покрова. Для этих волн $\upsilon > \upsilon_1$. Минимальное значение фазовой скорости изгибно-гравитационных волн и соответствующие ему волновое число, длина волны, частота и период колебаний для рассмотренных пунктов акватории моря приведены в табл. 5.2.3. Здесь же даны и соответствующие минимуму фазовой скорости величины волнового числа $r = r_1$, длины волны $\lambda_1 = 2\pi/r_1$, частоты $\sigma = \sigma_1$ и периода $\tau_1 = 2\pi/\sigma_1$ волновых возмущений. Отметим, что в случае битого льда частота плавучести льдин σ_0 для указанных пунктов равна соответственно 6.35, 6.46, 7.16, 7.42, 6.4, 7.0, 6.72, 6.35, 6.9, 7.21, 6.87, 9.69, 7.51 и 6.14 c^{-1}.

Таблица 5.2.1

Точки	Глубина H, м	Плотность ρ, кг/м³	Характерный период τ, с	Средняя высота волн, м	Средняя многолетняя толщина льда *h*, см
1	7	1009	3.6	0.6	28
2	10	1003	3.6	0.6	27
3	12	1005	3.8	0.7	22
4	11	1008	4.0	0.8	20.5
5	9	1003	3.6	0.6	27.5
6	12	1005	4.0	0.8	23
7	10	1008	4.0	0.8	25
8	10	1003	3.8	0.7	28
9	12	1005	4.0	0.8	23.7
10	10	1005	4.0	0.8	21.7
11	4	1005	3.6	0.6	23.9
12	8	1002	3.6	0.6	12
13	5	1002	3.2	0.4	20
14	3	1000	3.2	0.4	29.9

Таблица 5.2.2

Точки	Длина волны, м			Фазовая скорость волны, м/с		
	$h = 0$	$E = 0,\ h \neq 0$	$E \neq 0,\ h \neq 0$	$h = 0$	$E = 0,\ h \neq 0$	$E \neq 0,\ h \neq 0$
1	19.77	18.4	32.31	5.49	5.11	8.98
2	20.16	18.72	32.77	5.6	5.2	9.1
3	22.49	21.31	31.59	5.92	5.61	8.31
4	24.79	23.73	32.07	6.2	5.93	8.02
5	20.09	18.65	32.82	5.58	5.18	9.12
6	24.86	23.65	33.61	6.22	5.91	8.4
7	24.68	23.41	34.33	6.17	5.85	8.58
8	22.38	20.91	34.6	5.89	5.5	9.11
9	24.86	23.61	34	6.22	5.9	8.5
10	24.68	23.57	32.56	6.17	5.89	8.14
11	17.92	17.05	27.96	4.98	4.74	7.77
12	19.98	19.37	23.78	5.55	5.38	6.61
13	15.45	14.51	25.04	4.83	4.53	7.83
14	13.97	12.89	27.72	4.37	4.03	8.66

Таблица 5.2.3

Точки	υ_1, м·с$^{-1}$	σ_1, с$^{-1}$	τ_1, с	r_1, м$^{-1}$	λ_1, м
1	7.87	0.87	7.26	0.11	57.1
2	8.57	1.17	5.3	0.14	45.36
3	8.23	1.45	4.33	0.176	35.62
4	8	1.48	4.25	0.19	33.96
5	8.43	1.09	5.74	0.13	48.4
6	8.35	1.42	4.43	0.17	37.03
7	8.4	1.26	4.99	0.15	41.89
8	8.64	1.15	5.45	0.13	47.11
9	8.43	1.39	4.51	0.17	38.03
10	8.08	1.39	4.53	0.17	36.55
11	6.19	0.54	11.65	0.087	72.15
12	6.59	1.84	3.41	0.28	22.5
13	6.74	0.89	7.03	0.13	47.39
14	5.41	0.27	23.51	0.049	127.26

При сплоченных битых льдах имеют место необратимые потери энергии [64], обусловленные главным образом неупругим взаимодействием льдин между собой. Эти потери можно оценить, рассматривая ледяной покров как слой вязкой жидкости [69, 94] с большим коэффициентом внутреннего трения η. Тогда дисперсионное уравнение примет вид

$$\sigma^2\chi - rg\left(1 + i\sigma\eta_1 r^2\right)\ \mathrm{tg}\, rH = 0,$$

где $\eta_1 = \eta h / \rho g$.

Отсюда, полагая $\sigma = \sigma_0 + i\delta$ при заданной длине волны, найдем

$$\sigma_0 = \frac{1}{2\chi}\sqrt{rg\left(4\chi - \eta_1^2 r^5 g\ \mathrm{tg}\, rH\right)\ \mathrm{tg}\, rH},$$

$$\delta = \frac{\eta_1 r^3 g}{2\chi}\mathrm{tg}\, rH. \qquad (5.2.4)$$

Величина δ определяет скорость затухания гравитационных поверхностных волн. Отсюда видно, что в покрытом сплочённым битым льдом бассейне при учете трения периодические возмущения могут иметь место при условии

$$4\chi > \eta_1^2 r^5 g\ \mathrm{tg}\, rH.$$

Это условие в приближении мелкой воды можно переписать для длины волны возмущений λ в виде

$$\lambda^6 + 4\kappa\pi^2 gH\lambda^4 - 16\pi^6 gH\eta_1^2 > 0.$$

Если волны короткие, то длины волн возмущений в бассейне с плавающим битым льдом при учете вязкого трения удовлетворяет неравенству

$$\lambda^5 + 2\pi g\kappa\lambda^4 - 8\pi^5 g\eta_1^2 > 0.$$

В случае сплошного ледяного покрова представление о вполне упругом его поведении не всегда приемлемо. В значительной степени это относится к ледяному покрову, представляющему на начальной стадии состояния смесь воды, льда и снега. Такой ледяной покров обладает не только упругими, но и вязкими свойствами. Влияние вязкости на фазовые характеристики волн в этом случае можно оценить, моделируя плавающий лёд тонкой упругой пластинкой, покрытой слоем снега [37]. Тогда дисперсионное соотношение определяется выражением

$$\sigma^2\chi - rg\left(D_1 + i\sigma\eta_1 r^2\right)\ \mathrm{tg}\, rH = 0, \qquad (5.2.5)$$

где $\kappa = \dfrac{\rho_1 h}{\rho g}\left(1 + \dfrac{\rho_0 h_0}{\rho_1 g_1}\right)$, $\eta_1 = \dfrac{\eta h_0}{\rho g}$, h_0, r_0, η – плотность, толщина и коэффициент внутреннего трения снега. Отсюда при фиксированной длине волны найдем

$$\sigma_0 = \frac{1}{2\chi}\sqrt{rg\left(4D_1\chi - \eta_1^2 r^5 g\ \mathrm{tg}\, rH\right)\ \mathrm{tg}\, rH},$$

а декремент временного затухания определим по формуле (5.2.4). Условие существования периодических возмущений примет вид

$$4D_1\chi - \eta_1^2 r^5 g\ \mathrm{tg}\, rH > 0. \qquad (5.2.6)$$

Если волновое число r не удовлетворяет условию (5.2.6), то $\mathrm{Re}(\sigma) = 0$ и, следовательно, имеют место только затухающие непериодические возмущения. Графики на рис. 5.2.2 иллюстрируют дисперсионные кривые $\sigma_0(r)$ для района 1 бассейна с открытой поверхностью (линия 1), с плавающим битым (линия 2), битым вязким (линия 3), сплошным упругим (линия 4) и вязкоупругим (линия 5) ледяным покровом при $h_0 = 5$ см, $\rho_0 = 350$ кг/м^3, $\eta = 4\cdot10^6$ Па·с [169] и значениях параметров (5.2.3). Квадратами и кружками отмечены здесь верхние границы значений волнового числа $\mathrm{r} = \mathrm{r}_1$ и частоты колебаний $\sigma = \sigma_1$ при учёте вязкости ледяного покрова. Видно, что в бассейне с битым вязким и сплошным вязко-упругим ледяным покровом могут распространятся волны, для которых $\lambda > \lambda_0 = 2\pi/r_1$, $\tau > \tau_0 = 2\pi/\sigma_1$, где $\sigma_1 = \sigma_0(r_2)$, а r_1 и r_2 действительные корни уравнений $\sigma_0(r) = 0$ и $\sigma_0'(r) = 0$ соответственно. Штрих означает производную по r. Величины λ_0 и τ_0 приведены в табл. 5.2.4 при тех же значениях η, ρ_0 и h_0, что и для рис. 5.2.2. Отметим, что увеличение коэффициента внутреннего трения η приводит к росту τ_0 и λ_0, в то время как рост цилиндрической жесткости льда расширяет диапазоны частоты и длины волн возмущений.

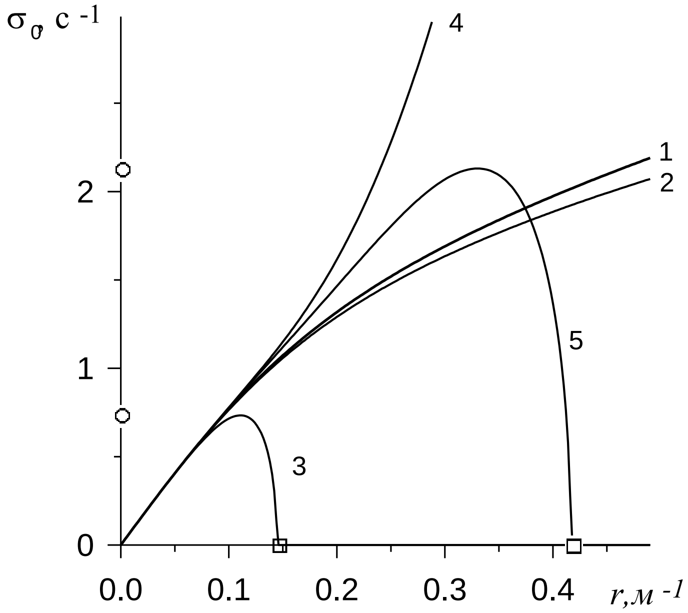

Рис. 5.2.2.

Из дисперсионной зависимости при $\eta \neq 0$ видно, что для $\sigma < \sigma_1$ существуют две системы периодических волновых возмущений одинаковой частоты, но разной длины волны. Одна из них (ζ_1) является гравитационной или изгибно-гравитационной, а вторая (ζ_2) обусловлена силами внутреннего трения ледяного покрова. При этом волна ζ_1, соответствующая гравитационной или изгибно-гравитационной ветви кривой $\sigma(r)$, имеет нормальную, а волна ζ_2 – аномальную дисперсию. При увеличении коэффициента внутреннего трения ледяного покрова характер дисперсионной зависимости качественно не изменяется для обеих систем волн. Количественное влияние роста η проявляется в уменьшении фазовых скоростей и интервалов значений волнового числа и частоты периодических волновых возмущений. При этом волны разных периодов колебаний могут распространяться с одинаковой фазовой скоростью.

Таблица 5.2.4

Точки	$E = 0$		$E \neq 0$	
	λ_0, м	τ_0, с	λ_0, м	τ_0, с
1	43.04	8.56	15.03	2.95
2	43.63	7.85	16.54	3.49
3	40.28	7.12	21.52	4.78
4	38.31	7.03	22.28	4.95
5	43.63	8.06	17.03	3.25
6	40.80	7.22	20.81	4.63
7	42.45	7.63	18.93	4.20
8	44.25	7.95	15.18	3.00
9	41.34	7.29	20.27	4.50
10	39.27	7.25	21.67	4.83
11	37.85	9.36	18.93	4.57
12	28.30	5.99	24.54	5.47
13	36.11	8.20	26.97	5.35
14	40.28	11.16	11.60	1.63

Из выражение (5.2.4) следует, что амплитуда волны уменьшается в е раз за промежуток времени $\Delta t = \delta^{-1}$. Так как $\lambda_2 < \lambda_1$, то скорость затухания волны ζ_2 большая, чем волны ζ_1. Фронт волны распространится от точки возбуждения на расстояние $L = v\Delta t$, прежде чем её начальная амплитуда уменьшится в e раз.

Пространственный декремент затухания волновых возмущений заданной частоты можно определить из (5.2.5), полагая $r = r_0 - i\gamma$. Тогда аналогично работе [37] найдём

$$\gamma = \frac{\eta_1 r^4 g\,\mathrm{tg}(rH)}{8\sigma(1+\kappa rg\,\mathrm{tg}(rH))}.$$

Численные значения δ и γ при соответствующих максимуму дисперсионных кривых (см. рис. 5.2.2) значениях $r = r_2$, $\sigma = \sigma_0(r_2)$ приведены в табл. 5.2.5 для сплочённого битого (с учётом трения) и вязко-упругого ледяного покрова.

Таблица 5.2.5

Точки	$E = 0$		$E \neq 0$	
	γ, м$^{-1}$	δ, с$^{-1}$	γ, м$^{-1}$	δ, с$^{-1}$
1	0.015	0.387	0.126	3.264
2	0.013	0.404	0.097	2.375
3	0.014	0.434	0.036	0.905
4	0.015	0.454	0.032	0.799
5	0.014	0.417	0.111	2.767
6	0.014	0.433	0.041	1.011
7	0.014	0.416	0.059	1.43
8	0.014	0.422	0.125	3.217
9	0.013	0.423	0.046	1.124
10	0.015	0.446	0.036	0.891
11	0.018	0.368	0.064	1.348
12	0.022	0.55	0.024	0.593
13	0.018	0.417	0.037	0.803
14	0.017	0.314	0.205	7.08

5.3. Оценка экранирующих свойств кромки льда

Волнение, генерируемое в открытой части моря, может проникать в полосу припайных и плавучих льдов, окаймляющих побережье в ледовый период. Когда волны попадают на границу льда, то часть волновой энергии отражается, а часть проходит в покрытую льдом область. Для оценки, экранирующей и пропускной способностей кромки сплошного льда использовалось полученное в [138, 30, 40] решение задачи о набегании плоской прогрессивной волны на кромку со стороны открытой воды. На основе этого решения вычислялись коэффициенты отражения R и прохождения T по формулам

$$R = \frac{R^*}{I}, \qquad T = \frac{r\,\mathrm{sh}\,rH}{k\,\mathrm{sh}\,kH} \cdot \frac{T^*}{I},$$

где k и r волновые числа, а I и T^* модули амплитудных коэффициентов набегающей на кромку гравитационной и прошедшей в покрытую льдом область изгибно-гравитационной волн. Отражённую от кромки гравитационную волну представляет взятый по модулю амплитудный коэффициент R^*.

Расчёты проводились для пунктов 1, 2, 4, 5, 7 – 10 (см. рис. 5.2.1) при значениях параметров (5.2.3) и приведённых в табл. 5.2.1 характеристиках гидрологического режима, толщины льда, периода и средней высоты набегающих волн. Область возможных значений коэффициентов отражения R и прохождения T изображена на рис. 5.2.3.

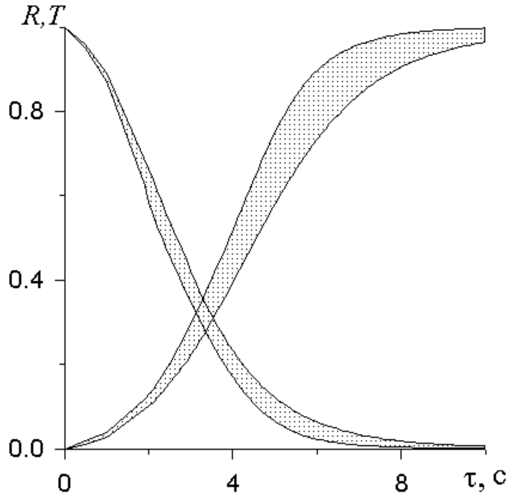

Рис. 5.2.3.

Анализ результатов показал, что для всех рассматриваемых районов волна с периодом более 8 секунд практически не ощущает наличие ледяного покрова и проходит через его кромку без деформации. На меньших периодах влияние кромки может быть значительным. Для сравнительного анализа экранирующей и пропускной способностей кромок в различных областях моря на рис. 5.2.4 приведена диаграмма, иллюстрирующая распределение амплитудных коэффициентов R и T по указанным районам. Видно, что наибольшая пропускная способность характерна для восточных и юго-восточных районов моря, тогда как лёд в северо-западных районах обладает более значительными экранирующими свойствами. Следует заметить, что для каждого из районов при рассмотренных условиях амплитуды отражённых и прошедших волн не превышают 50% от амплитуды падающей волны. Это объясняется тем, что часть волновой энергии расходуется на генерацию по обе стороны от кромки быстро затухающих с удалением от неё возмущений.

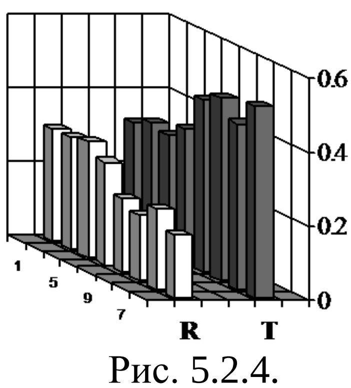

Рис. 5.2.4.

При исследовании динамики замерзающих морей также представляет интерес оценка прочности льда для последующего расчёта его несущей способности, определения усилий, вызывающих его ломку, торошение и т.д. Ожидаемое напряжение изгиба $N(x)$, отнесённое к величине модуля Юнга E, как функция расстояния от кромки приведено на рис. 5.2.5.

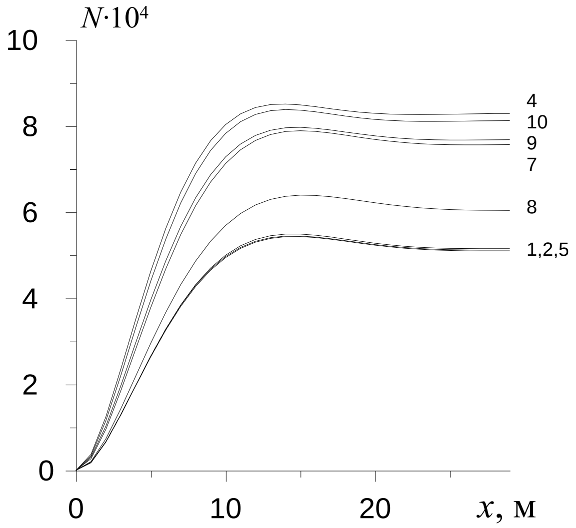

Рис. 5.2.5.

Номерами здесь указаны кривые для соответствующего района. Графики показывают, что в рассматриваемых районах $N(x)$ достигает своего максимального значения на расстоянии примерно 15 метров от кромки. Отметим, что экспериментально полученная в лабораторных условиях величина прочности морского льда на изгиб N_k имеет большой разброс и даёт величину порядка $5\cdot10^{-4}\div3\cdot10^{-3}$ [8]. Однако прочность льда, полученная по испытаниям в натурных условиях, оказывается значительно меньшая, чем при определении её по испытаниям малых образцов [100, 142]. Измерения напряжений при разломах морского льда во время океанических экспериментов дают для N_k величины, примерно равные 10^{-4}. Из сопоставления расчётных значений напряжений с экспериментально полученными пределами прочности льда видно, что в случае развитого волнения высота волн может быть достаточна для разлома льда на некотором удалении от кромки по всему её периметру.

ГЛАВА 6. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В БАССЕЙНЕ С ПЛАВАЮЩИМ БИТЫМ ЛЬДОМ

6.1. Уравнения для определения нелинейных приближений

Пусть поверхность однородной идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей неограниченный бассейн конечной глубины H_0, покрыта плавающим льдом. Размеры льдин будем считать малыми по сравнению с длиной волны, а их вертикальные перемещения отслеживающими профиль взволнованной поверхности жидкости. По классификации [8, 90, 109, 117] такой лед принято считать битым. Рассмотрим его влияние на периодические бегущие волны конечной амплитуды. При этом пренебрежем трением льдин. Так как при сделанных допущениях не происходит изгиба льдин, то из восстанавливающих сил при исследовании колебаний учтем только силу тяжести. Тогда, предполагая движение жидкости потенциальным [7, 123], а амплитуды возмущений конечными, получим для определения потенциала скорости Φ уравнение Лапласа

$$\Delta\Phi = 0, -\infty < x_1 < \infty, -H_0 < z_1 < \zeta^*, \tag{6.1.1}$$

с граничными условиями на поверхности бассейна $\left(z_1 = \zeta^*\right)$

$$\zeta^* - \frac{1}{g}\frac{\partial\Phi}{\partial t_1} + \frac{1}{g}\kappa\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z_1 \partial x_1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial t_1 \partial z_1}\right) + \frac{1}{2g}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z_1}\right)^2\right] = 0 \tag{6.1.2}$$

и на дне ($z_1 = -H_0$)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z_1} = 0. \tag{6.1.3}$$

В начальный момент времени ($t_1 = 0$)

$$\zeta^*(x_1, t_1) = f(x_1), \frac{\partial\zeta^*}{\partial t_1} = 0. \tag{6.1.4}$$

Здесь $\kappa = h\rho_1/\rho$, h и ρ_1 – толщина и плотность льда, ρ – плотность жидкости, g – ускорение силы тяжести. Потенциал скорости движения жидкости Φ и возвышение поверхности бассейна ζ^* связаны кинематическим соотношением.

$$\frac{\partial\zeta^*}{\partial t_1} - \frac{\partial\zeta^*}{\partial x_1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial z_1} = 0, \quad z_1 = \zeta^*. \tag{6.1.5}$$

В динамическом условии (6.1.2) выражение с множителем κ представляет собой инерцию вертикальных смещений льда. Причем первое слагаемое в скобках этого выражения характеризует нелинейность вертикального ускорения льда.

Введем безразмерные величины

$$x = kx_1,\ z = kz_1,\ t = \sqrt{kg}\,t_1,\ \zeta = k\zeta^*, \varphi = \frac{k^2}{\sqrt{kg}}\Phi,$$

где k – волновое число. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t_1} = \sqrt{kg}\,\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{\partial}{\partial x_1} = k\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial z_1} = k\frac{\partial}{\partial z},$$

и задача (6.1.1) – (6.1.5) перепишется в виде

$$\Delta\varphi = 0, -\infty < x < \infty, -H < z < \zeta, \tag{6.1.6}$$

$$\zeta - \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \kappa k\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\ \partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\ \partial z}\right) + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] = 0,\ z = \zeta, \tag{6.1.7}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} - \frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0,\ \ z = \zeta, \tag{6.1.8}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0,\ \ z = -H, \tag{6.1.9}$$

$$\zeta(x,0) = f(x),\quad \zeta_t(x,0) = 0. \tag{6.1.10}$$

Решение задачи (6.1.6)–(6.1.10) найдем методом многих масштабов [85], позволяющим получить для ζ и φ равномерно пригодные разложения и применявшимся к широкому кругу задач, в том числе в теории волн на воде [134, 152] и в атмосфере [161]. Введем две новые медленно меняющиеся по сравнению с $t = T_0$ переменные $T_1 = \varepsilon t$, $T_2 = \varepsilon^2 t$, где ε - малое, но конечное, и предположим справедливость разложений

$$\zeta(x,t,\varepsilon) = \sum_{n=1}^{3}\varepsilon^n\zeta_n(x,T_0,T_1,T_2) + O\left(\varepsilon^4\right),$$

$$\varphi(x,z,t,\varepsilon) = \sum_{n=1}^{3}\varepsilon^n\varphi_n(x,z,T_0,T_1,T_2) + O\left(\varepsilon^4\right), \tag{6.1.11}$$

$$f(x,\varepsilon) = \sum_{n=1}^{3}\varepsilon^n f_n(x) + O\left(\varepsilon^4\right),$$

таких, что отношения $\zeta_n/\zeta_{n-1}, \varphi_n/\varphi_{n-1}, f_n/f_{n-1}$ ограничены для всех T_0, T_1, T_2. Применив правило дифференцирования сложной функции, получим, что частное дифференцирование по времени изменится в соответствии с равенством

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}. \tag{6.1.12}$$

Подставим из (6.1.11) выражения

$$\zeta = \varepsilon\zeta_0,\ \varphi = \varepsilon\varphi_0,\ f = \varepsilon f_0, \tag{6.1.13}$$

$$\zeta_0 = \zeta_1 + \varepsilon\zeta_2 + \varepsilon^2\zeta_3,\ \varphi_0 = \varphi_1 + \varepsilon\varphi_2 + \varepsilon^2\varphi_3,\ f_0 = f_1 + \varepsilon f_2 + \varepsilon^2 f_3$$

в (6.1.6)–(6.1.10) и соберем коэффициенты при одинаковых степенях ε.

Тогда из уравнения Лапласа найдем

$$\varepsilon\Delta\varphi_1 + \varepsilon^2\Delta\varphi_2 + \varepsilon^3\Delta\varphi_3 = 0. \qquad (6.1.14)$$

Рассмотрим теперь динамическое (6.1.7) и кинематическое (6.1.8) условия. В силу малости ε перенесем их с кривой $z = \zeta$ на $z = 0$ с помощью разложений

$$\varphi(x,t,\varepsilon\zeta_0) = \varphi(x,t,0) + \varepsilon\zeta_0\varphi_z(x,t,0) + \frac{1}{2}\varepsilon^2\zeta_0^2\varphi_{zz}(x,t,0) \quad + \quad \cdots,$$

$$\varphi_z(x,t,\varepsilon\zeta_0) = \varphi_z(x,t,0) + \varepsilon\zeta_0\varphi_{zz}(x,t,0) + \frac{1}{2}\varepsilon^2\zeta_0^2\varphi_{zzz}(x,t,0) \quad + \cdots.$$

Отсюда

$$\varphi = \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \varepsilon^3\varphi_3 + \left(\varepsilon\zeta_1 + \varepsilon^2\zeta_2 + \varepsilon^3\zeta_3\right)\left(\varepsilon\varphi_{1z} + \varepsilon^2\varphi_{2z} + \varepsilon^3\varphi_{3z}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\varepsilon^3\zeta_1^2\varphi_{1zz} + \cdots$$

или

$$\varphi = \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\left(\varphi_2 + \zeta_1\varphi_{1z}\right) + \varepsilon^3\left(\varphi_3 + \zeta_1\varphi_{2z} + \zeta_2\varphi_{1z} + \frac{1}{2}\zeta_1^2\varphi_{1zz}\right) + \cdots, \quad (6.1.15)$$

$$\varphi_z = \varepsilon\varphi_{1z} + \varepsilon^2\left(\varphi_{2z} + \zeta_1\varphi_{1zz}\right) + \varepsilon^3\left(\varphi_{3z} + \zeta_1\varphi_{2zz} + \zeta_2\varphi_{1zz} + \frac{1}{2}\zeta_1^2\varphi_{1zzz}\right) + \cdots. (6.1.16)$$

Найдем φ_x , учитывая зависимость ζ_0 от x в выражении $\varphi(x, \varepsilon\zeta_0)$. Тогда

$$\varphi_x = \varepsilon\varphi_{1x} + \varepsilon^2\left(\varphi_{2x} + \zeta_{1x}\varphi_{1z} + \zeta_1\varphi_{1zx}\right) + \varepsilon^3(\varphi_{3x} + \zeta_{1x}\varphi_{2z} + \zeta_1\varphi_{2zx} +$$
$$+ \zeta_{2x}\varphi_{1z} + \zeta_2\varphi_{1zx} + \frac{1}{2}\zeta_1^2\varphi_{1zzx} + \zeta_1\zeta_{1x}\varphi_{1zz}) + \cdots. \qquad (6.1.17)$$

Используя (6.1.12) и подставляя φ_x, φ_z в (6.1.8), получим при $z = 0$

$$\left(\frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}\right)\left(\varepsilon\zeta_1 + \varepsilon^2\zeta_2 + \varepsilon^3\zeta_3\right) - \left(\varepsilon\zeta_{1x} + \varepsilon^2\zeta_{2x} + \varepsilon^3\zeta_{3x}\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\varepsilon\varphi_{1x} + \varepsilon^2\left(\varphi_{2x} + \zeta_{1x}\varphi_{1z} + \zeta_1\varphi_{1zx}\right) + \varepsilon^3\left(\varphi_{3x} + \zeta_{1x}\varphi_{2z} + \zeta_1\varphi_{2zx} + \ldots\right)\right] + \varepsilon\varphi_{1z} +$$

$$+ \varepsilon^2\left(\varphi_{2z} + \zeta_1\varphi_{1zz}\right) + \varepsilon^3\left(\varphi_{3z} + \zeta_1\varphi_{2zz} + \zeta_2\varphi_{1zz} + \frac{1}{2}\zeta_1^2\varphi_{1zzz}\right) + \quad \cdots = 0. (6.1.18)$$

Так как

$$\left(\frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}\right)\left(\varepsilon\zeta_1 + \varepsilon^2\zeta_2 + \varepsilon^3\zeta_3\right) = \varepsilon\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_0} + \varepsilon^2\frac{\partial\zeta_2}{\partial T_0} + \varepsilon^3\frac{\partial\zeta_3}{\partial T_0} +$$

$$+\varepsilon^2\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_1}+\varepsilon^3\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_2}+\cdots=\varepsilon\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_0}+\varepsilon^2\left(\frac{\partial\zeta_2}{\partial T_0}+\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_1}\right)+\varepsilon^3\left(\frac{\partial\zeta_3}{\partial T_0}+\frac{\partial\zeta_2}{\partial T_1}+\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_2}\right)+\cdots,$$

то из (6.1.18), собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε и ограничившись величинами порядка ε^3, найдем

$$\varepsilon\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_0}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)+\varepsilon^2\left(\frac{\partial\zeta_2}{\partial T_0}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}-\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_1}+\zeta_1\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}\right)+$$

$$+\varepsilon^3\left[\frac{\partial\zeta_3}{\partial T_0}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}-\frac{\partial\zeta_2}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\zeta_1\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z\partial x}\right)+\zeta_1\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2}+\right.$$

$$\left.+\zeta_1\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2}+\zeta_2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}+\frac{1}{2}\zeta_1^2\frac{\partial^{\ 3}\varphi_1}{\partial z^3}+\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_2}+\frac{\partial\zeta_2}{\partial T_1}\right]=0,\ \text{при } z=0. \qquad (6.1.19)$$

Подставим теперь выражения (6.1.13), (6.1.15), (6.1.16), (6.1.17) для ζ, φ, φ_z, φ_x в динамическое условие (6.1.7). Используя при этом (6.1.12), найдем

$$\varepsilon\zeta_1+\varepsilon^2\zeta_2+\varepsilon^3\zeta_3-\left(\frac{\partial}{\partial T_0}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}\right)\left[\varepsilon\varphi_1+\varepsilon^2(\varphi_2+\zeta_1\varphi_{1z})+\right.$$

$$\left.+\varepsilon^3\left(\varphi_3+\zeta_1\varphi_{2z}+\zeta_2\varphi_{1z}+\frac{1}{2}\zeta_1^2\varphi_{1zz}\right)\right]+\frac{1}{2}\left[\varepsilon\varphi_{1x}+\varepsilon^2(\varphi_{2x}+\zeta_{1x}\varphi_{1z}+\zeta_1\varphi_{1zx})+\right.$$

$$\left.+\varepsilon^3(\cdots)\right]^2+\frac{1}{2}\left[\varepsilon\varphi_{1z}+\varepsilon^2(\varphi_{2z}+\zeta_1\varphi_{1zz})+\varepsilon^3(\cdots)\right]^2+\ \kappa k\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\varepsilon\varphi_{1z}+\varepsilon^2(\varphi_{2z}+\right.\right.$$

$$\left.+\zeta_1\varphi_{1zz})+\varepsilon^3\left(\varphi_{3z}+\zeta_1\varphi_{2zz}+\zeta_2\varphi_{1zz}+\frac{1}{2}\zeta_1^2\varphi_{1zzz}\right)+\cdots\right]\left[\varepsilon\varphi_{1x}+\varepsilon^2(\varphi_{2x}+\right.$$

$$\zeta_{1x}\varphi_{1z}+\zeta_1\varphi_{1zx})+\varepsilon^3\left(\varphi_{3x}+\zeta_{1x}\varphi_{2z}+\zeta_1\varphi_{2zx}+\zeta_{2x}\varphi_{1z}+\zeta_2\varphi_{1zx}+\frac{1}{2}\zeta_1^2\varphi_{1zzx}+\right.$$

$$\left.\left.+\zeta_1\zeta_{1x}\varphi_{1zz}\right)+\cdots\right]-\left(\frac{\partial}{\partial T_0}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}\right)\left[\varepsilon\varphi_{1z}+\varepsilon^2(\varphi_{2z}+\zeta_1\varphi_{1zz})+\right.$$

$$\left.\left.\varepsilon^3\left(\varphi_{3z}+\zeta_1\varphi_{2zz}+\zeta_2\varphi_{1zz}+\frac{1}{2}\zeta_1^2\varphi_{1zzz}\right)+\cdots\right]\right\},\ \text{при } z=0.$$

Отсюда, выполняя дифференцирование по горизонтальной координате и времени с учетом зависимости ζ_0 от x и t и собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε до величин третьего порядка, получим

$$\varepsilon\left(\zeta_1-\frac{\partial\varphi_1}{\partial T_0}-\kappa\ k\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z\partial T_0}\right)+\varepsilon^2\left[\zeta_2-\frac{\partial\varphi_2}{\partial T_0}-\zeta_1\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial T_0\,\partial z}-\frac{\partial\ \varphi_1}{\partial T_1}-\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_0}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2-\kappa k\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_0}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}+\zeta_1\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial z^2\partial T_0}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z\,\partial T_1}-\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z\,\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z\,\partial T_0}\right)\right]+\varepsilon^3\left[\zeta_3-\frac{\partial\varphi_3}{\partial T_0}-\zeta_1\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial T_1\,\partial z}+\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_0}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial T_0\partial z}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z\partial x}\right)-\zeta_2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial T_0\partial z}-\frac{1}{2}\zeta_1^2\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial T_0\partial z^2}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial T_1}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial T_2}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}-$$

$$-\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_0}\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}-\frac{\partial\zeta_2}{\partial T_0}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}-\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}-\kappa k\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_0}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2}+\zeta_1\frac{\partial^3\varphi_2}{\partial z^2\,\partial T_0}+\right.$$

$$+\frac{\partial\zeta_2}{\partial T_0}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}+\zeta_2\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial z^2\partial T_0}+\frac{1}{2}\zeta_1^2\frac{\partial^4\varphi_1}{\partial z^3\partial T_0}+\zeta_1\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_0}\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial z^3}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z\,\partial T_1}+\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_1}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}+$$

$$+\zeta_1\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial z^2\partial T_1}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z\partial T_2}-\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z\partial x}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}-\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z\partial x}\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}-\zeta_1\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z\,\partial x}\right)^2-\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-$$

$$\left.\left.\zeta_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial z^2\partial x}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial z\,\partial T_0}\right)\right]=0,\ \text{при } z=0. \qquad (6.1.20)$$

Приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε в (6.1.14), кинематическом (6.1.19) и динамическом (6.1.20) условиях, а также в условии на дне (6.1.9) и начальных условиях (6.1.10), принимая во внимание (6.1.12), (6.1.13).

В результате из (6.1.6)–(6.1.10) получим для приближений ζ_n, φ_n порядка ε^n, $n = 1, 2, 3$ соответствующие уравнения

$$\Delta\varphi_n=0, -\infty<x<\infty,\quad H<z<0, \qquad (6.1.21)$$

$$\zeta_n-\frac{\partial\varphi_n}{\partial T_0}-\kappa k\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial z\partial T_0}=F_n^*,\quad z=0, \qquad (6.1.22)$$

$$\frac{\partial\zeta_n}{\partial T_0}+\frac{\partial\varphi_n}{\partial z}=L_n^*,\quad z=0, \qquad (6.1.23)$$

$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial z}=0,\quad z=-H, \qquad (6.1.24)$$

$$\zeta_n=f_n(x),\ \frac{\partial\zeta_n}{\partial T_0}=G_n,\quad t=0. \qquad (6.1.25)$$

Здесь

$$F_n^*=F_n+F_n^0,\ L_n^*=L_n+L_n^0,\ F_1=F_1^0=L_1=L_1^0=L_2^0=G_1=0,$$

$$F_2=\zeta_1\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial T_0\,\partial z}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial T_1}-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2\right]+\kappa kN,$$

$$L_2=\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_1}-\zeta_1\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2},\ G_2=-\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_1},$$

$$N=\zeta_1\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial z^2\partial T_0}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z\partial T_1}-\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x},$$

$$F_3=\zeta_1N_1+\frac{1}{2}\zeta_1^2\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial T_0\partial z^2}+\zeta_2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial T_0\partial z}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial T_1}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial T_2}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}-$$

$$-\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}+\kappa kN_2\ ,$$

$$N_1=\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial T_1\partial z}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial T_0\partial z}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z\partial x}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2},$$

$$N_2=\zeta_1N_3+\frac{1}{2}\zeta_1^2\frac{\partial^4\varphi_1}{\partial z^3\partial T_0}+\zeta_2\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial z^2\partial T_0}+\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_0}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2}+\frac{\partial\zeta_2}{\partial T_0}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}+N_4,$$

$$N_3=\frac{\partial^3\varphi_2}{\partial z^2\partial T_0}+\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_0}\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial z^3}+\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial z^2\partial T_1}-\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z\partial x}\right)^2-\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial z^2\partial x},$$

$$N_4=\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z\partial T_1}+\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_1}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z\partial T_2}-\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z\partial x}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}-\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x},$$

$$L_3=\zeta_1\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2}\right)-\frac{1}{2}\zeta_1^2\frac{\partial^3\varphi_1}{\partial z^3}-\zeta_2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}+N_5,$$

$$N_5=\frac{\partial\zeta_2}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}-\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_2}-\frac{\partial\zeta_2}{\partial T_1},\ G_3=-\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_2}-\frac{\partial\zeta_2}{\partial T_1},$$

$$F_2^0=\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_0}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\kappa k\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_0}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2},\ L_3^0=\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\varphi_1}{\partial z},$$

$$F_3^0=\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_0}\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}+\frac{\partial\zeta_2}{\partial T_0}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\zeta_1\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_0}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}+\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}-$$

$$-\kappa k\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}\right).$$

Отметим, что слагаемые F_2^0, F_3^0, L_3^0, входящие в правые части уравнений (6.1.22), (6.1.23), обусловлены учетом зависимости ζ_0 от x и t при нахождении производной (6.1.17) от потенциала скорости (6.1.15). Из (6.1.22)–(6.1.23) видно, что в приближении порядка ε зависимость ζ_0 от

x при определении $\varphi_x(x, \varepsilon\zeta_0)$ не проявляется ($F_1^0 = L_1^0 = 0$). В приближениях же ε^2 и ε^3 появились слагаемые, обусловленные этой зависимостью. Причем в приближении ε^2 такое слагаемое (F_2^0) входит только в динамическое, а в приближении ε^3 в динамическое (F_3^0) и кинематическое (L_3^0) условия.

6.2. Выражения для потенциала скорости и возвышения поверхности бассейна

Задача (6.1.21)–(6.1.25) сформулирована в общем случае неустановившихся возмущений конечной амплитуды. Остановимся на рассмотрении бегущих периодических волн [96, 104], задавая $f_n(x)$ в соответствующем виде. В таком случае выберем первое приближение ($n = 1$) возвышения поверхности бассейна ζ_1 в форме

$$\zeta_1 = \cos\theta,\ \theta = x + \tau T_0 + \beta(T_1, T_2)\,. \qquad (6.2.1)$$

Тогда из кинематического условия (6.1.23) находим

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \tau\sin\theta,\ z=0\,. \qquad (6.2.2)$$

Чтобы удовлетворить граничному условию (6.1.24) на дне бассейна, запишем φ_1 в форме

$$\varphi_1 = b_0\,\mathrm{ch}(z+H)\sin\theta. \qquad (6.2.3)$$

После подстановки (6.2.3) в (6.2.2) получим $b_0 = \tau(\mathrm{sh}H)^{-1}$. В результате имеем

$$\varphi_1 = b_1\sin\theta,\ b_1 = \tau(\mathrm{sh}\,H)^{-1}\mathrm{ch}(z+H)\,. \qquad (6.2.4)$$

Подставляя (6.2.1) и (6.2.4) в динамическое условие (6.1.22), найдем дисперсионное соотношение

$$\tau^2 = (1 + \kappa k\,\mathrm{th}H)^{-1}\mathrm{th}H\,. \qquad (6.2.5)$$

Выражение, определяющее $\beta(T_1, T_2)$ в (6.2.1), получим из последующих приближений. Чтобы найти второе приближение (решение задачи при $n = 2$), определим правые части уравнений (6.1.22), (6.1.23) с учетом (6.2.1), (6.2.4). Тогда с учетом требования отсутствия основной гармоники получим

$$\zeta_2 = a_2\cos 2\theta,\ \varphi_2 = b_2\sin 2\theta + \varphi_2^*, \qquad (6.2.6)$$

где

$$a_2 = \tau^2\left[\mathrm{th}2H - 2\tau^2(1 + 2\kappa k\mathrm{th}2H)\right]^{-1}\mu_2,$$
$$b_2 = \tau\left(a_2 - \frac{1}{2}\mathrm{cth}H\right)\mathrm{ch}2(z+H)\mathrm{sh}^{-1}2H\,,$$

$$\mu_2 = \mathrm{th}\,2H - \frac{1}{4}\frac{\mathrm{th}\,2H}{\mathrm{sh}^2 H} - \mathrm{cth}H - \frac{3}{2}\kappa k\,\mathrm{cth}H\,\mathrm{th}\,2H\,,$$

$$\varphi_2^* = \frac{\tau^2}{4}\left(1 + \mathrm{cth}^2 H + 2\kappa k\,\mathrm{cth}H\right)T_0.$$

При этом оказывается, что θ не зависит от T_1, так как $\beta = \beta_2(T_2)$. Полученные решения для первого (6.2.1), (6.2.4) и второго (6.2.6) приближений определяют правые части динамического (6.1.22) и кинематического (6.1.23) условий задачи для третьего приближения ($n = 3$). Исключив в них слагаемые, порождающие секулярность, для ζ_3, φ_3 в третьем приближении найдем

$$\zeta_3 = a_3\cos 3\theta, \varphi_3 = b_3\sin 3\theta + \varphi_3^*,\ \beta = -\tau\sigma_0 T_2\,.$$

Здесь

$$a_3 = \tau^2\left[\mathrm{th}\,3H - 3\tau^2(1 + 3\kappa k\,\mathrm{th}\,3H)\right]^{-1}\mu_3\,,$$

$$b_3 = \tau\left(a_3 + \frac{1}{3}l_2\right)\mathrm{ch}\,3(z + H)\,\mathrm{sh}^{-1}3H\,,$$

$$\varphi_3^* = \tau\left(l_1 - \sigma_0\right)\mathrm{ch}(z + H)\,\mathrm{sh}^{-1}H\sin\theta,$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}\left(l_1 + \tau^2 l_3 + \kappa k\tau^2 l_6\right),\ \mu_3 = l_2 + (l_4 - \kappa k l_0)\,\mathrm{th}\,3H\,,$$

$$l_0 = a_2(4\mathrm{cth}\,2H + 5\mathrm{cth}H) - \frac{1}{2}\mathrm{cth}H(4\,\mathrm{cth}\,2H + \mathrm{cth}H) + \frac{1}{2},$$

$$l_1 = \frac{1}{2}l_5 + \frac{3}{8}\,,\ l_2 = \frac{3}{2}l_5 - \frac{5}{8},$$

$$l_3 = \frac{1}{2}\mathrm{cth}H\left(\mathrm{cth}H\,\mathrm{cth}\,2H - \frac{5}{4}\right) - a_2\left(\mathrm{cth}H\,\mathrm{cth}\,2H + \frac{1}{2}\right),$$

$$l_4 = \frac{1}{2}\mathrm{cth}H\left(\mathrm{cth}H\,\mathrm{cth}\,2H - \frac{15}{4}\right) - a_2\left(\mathrm{cth}H\,\mathrm{cth}\,2H - \frac{11}{2}\right),$$

$$l_5 = \mathrm{cth}H\,\mathrm{cth}\,2H - a_2(\mathrm{cth}H + 2\mathrm{cth}\,2H),$$

$$l_6 = a_2\left(\mathrm{cth}\,2H - \frac{5}{2}\mathrm{cth}H\right) - \frac{1}{2}\mathrm{cth}H\left(\mathrm{cth}\,2H - \mathrm{cth}H\right) - \frac{3}{8}.$$

Следовательно, возмущения поверхности бассейна ζ и потенциал скорости движения жидкости φ до величин третьего порядка малости определяются из выражений

$$\zeta = \sum_{n=1}^{3}\varepsilon^n a_n\cos n\theta,\ \varphi = \sum_{n=1}^{3}\varepsilon^n\left(b_n\sin n\theta + \varphi_n^*\right),$$

$$\theta = x + \sigma t\,,\quad \sigma = \tau(1 - \varepsilon^2\sigma_0)\,,\quad a_1 = 1\,,\quad \varphi_1^* = 0\,.$$

В размерных величинах ($\zeta = \zeta/k$, $\Phi = \varphi\sqrt{kg}/k^2$, $\varepsilon = a\ \ k$, где a – амплитуда начальной гармоники)

$$\zeta = a\cos\theta + a^2 k a_2 \cos 2\theta + a^3 k^2 a_3 \cos 3\theta, \qquad (6.2.7)$$

$$\Phi = a\sqrt{g/k}\,b_1 \sin\theta + a^2\sqrt{kg}\,b_2 \sin 2\theta + a^3 k\sqrt{kg}\,b_3 \sin 3\theta + \sum_{n=1}^{3} \varepsilon^n \Phi_n^*\,, \qquad (6.2.8)$$

где $\theta = kx + \sqrt{kg}\ \ \tau\ \left(1 - a^2k^2\sigma_0\right)t$, $\Phi_n^* = \varphi_n^*\sqrt{kg}/k^2$,

а индекс 1 у x, t и звездочка у ζ здесь и далее опущены.

6.3. Анализ волновых характеристик

Фазовую скорость волновых возмущений определим из формул

$$v = v_1\left(1 - \varepsilon^2\sigma_0\right),\ \ v_1 = \tau\sqrt{g/k}\,. \qquad (6.3.1)$$

Из полученных выражений следует, что частота $\sigma = \tau\sqrt{kg}\left(1 - \varepsilon^2\sigma_0\right)$ и фазовая скорость ν возмущений зависит от толщины льда, а в приближении ε^2 – и от амплитуды начальной гармоники.

Частота $\sigma_1 = \tau\sqrt{kg}$ и фазовая скорость ν_1 основной линейной гармоники убывают с ростом толщины льда. Кроме того, σ_1 для $h \neq 0$ не превосходит величину $\sigma_* = \sqrt{g/\kappa}$ при $k \to \infty$, в то время как при отсутствии льда она неограниченно возрастает с увеличением k. Следовательно, в жидкости с плавающим битым льдом прогрессивные волны с частотой, превышающей σ_*, распространятся не могут [15, 29, 30, 117, 155, 156].

В случае коротких волн ($kH >> 1$) решение упрощается, так как

$$a_2 = \frac{3}{2}\frac{\kappa\ \ k}{1 + 3\ \ \kappa k},\ a_3 = -\frac{1}{4}\frac{\kappa\ \ k(4 - 15\kappa k)}{(1 + 4\kappa k)(1 + 3\kappa k)}, \sigma_0 = -\frac{3 + 7\kappa k + 12\kappa^2 k^2}{8(1 + \kappa k)(1 + 3\kappa k)},$$

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa\ \ k}},\ \sigma_1 = \sqrt{\frac{kg}{1 + \kappa\ \ k}},\ v_1 = \sqrt{\frac{g}{k\ \ (1 + \kappa\ \ k)}}, \qquad (6.3.2)$$

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_1\sigma_0 = -\frac{1}{2}\sqrt{g/\kappa}\,,\ \lim_{k\to\infty} \nu_1\sigma_0 = 0\,,\ \lim_{k\to\infty} a_2 = \frac{1}{2}\,,\ \lim_{k\to\infty} a_3 = \frac{5}{16}.$$

Отсюда следует, что чем короче волна, тем меньше влияние нелинейности на ее фазовую скорость.

Если в динамическом условии (6.1.7) на поверхности бассейна пренебречь нелинейностью вертикального ускорения льда, то ζ, Φ, θ, ν будут определяться формулами (6.2.7)–(6.3.1) с той разницей, что

$$\varphi_2^* = \frac{1}{4}\tau^2\left(1+\mathrm{cth}^2 H\right)t,\ \sigma_0 = \frac{1}{2}\left(l_1 + \tau^2 l_3\right) \tag{6.3.3}$$

и μ_2, μ_3 в выражениях для a_2, a_3 примут вид

$$\mu_2 = \mathrm{th}2H - \frac{1}{4}\frac{\mathrm{th}2H}{\mathrm{sh}^2 H} - \mathrm{cth}H,$$

$$\mu_3 = l_2 + l_4\mathrm{th}3H. \tag{6.3.4}$$

В приближении коротких волн в этом случае имеем

$$a_2 = 0,\ a_3 = 0, \sigma_0 = -\frac{1}{16}\frac{6+7\kappa k}{(1+\kappa k)},\ \lim_{k\to\infty}\sigma_1\sigma_0 = -\frac{7}{16}\sqrt{g/\kappa},$$

а при отсутствии льда

$$a_2 = 0,\ a_3 = 0,\ \sigma_0 = -3/8, \tau = 1, \sigma_1 = \sqrt{kg},\ \nu_1 = \sqrt{g/k}.$$

Анализ результатов, полученных при полном учете кривизны волнового профиля в поверхностных граничных условиях для нелинейных приближений, показывает, что линейная короткая волна имеет меньшую фазовую скорость, чем нелинейная. Чем короче волна начальной основной гармоники, тем меньше отличаются значения ее фазовой скорости в линейном и нелинейном случаях. Влияние плавающего льда на амплитуду бегущей волны проявляется как во втором, так и в третьем приближениях. Однако если при этом пренебречь нелинейностью вертикального ускорения льдин, то амплитуды второго a_2 и третьего a_3 приближений обращаются в нуль. Влияние нелинейности проявляется только в фазовом сдвиге волны и в увеличении ее фазовой скорости. С уменьшением длины волны ее фазовая скорость убывает. Это имеет место и на чистой воде.

Если при выводе кинематического и динамического поверхностных условий для нелинейных приближений пренебречь кривизной волнового профиля в выражении потенциала скорости волновых течений [26, 129, 130, 132, 133, 152], полагая F_2^0, F_3^0, L_3^0 равными нулю в (6.1.22), (6.1.23), то в формулах (6.2.6)–(6.2.8) следует учесть, что

$$l_0 = a_2(4\mathrm{cth}2H + 5\mathrm{cth}H) - \frac{1}{2}\mathrm{cth}H\left(4\mathrm{cth}2H + \frac{3}{2}\mathrm{cth}H\right) + 1,$$

$$l_1 = \frac{1}{2}l_5 - \frac{3}{8},\ l_2 = \frac{3}{2}l_5 - \frac{3}{8},$$

$$l_3 = \frac{1}{2}\mathrm{cth}H\left(\mathrm{cth}H\,\mathrm{cth}2H - \frac{9}{4}\right) - a_2\left(\mathrm{cth}H\,\mathrm{cth}2H - \frac{3}{2}\right),$$

$$l_4 = \frac{1}{2}\mathrm{cth}H\left(\mathrm{cth}H\,\mathrm{cth}2H - \frac{11}{4}\right) - a_2\left(\mathrm{cth}H\,\mathrm{cth}2H - \frac{7}{2}\right),$$

$$l_5 = \mathrm{cth}H\,\mathrm{cth}2H - a_2(\mathrm{cth}H + 2\mathrm{cth}2H),$$

$$l_6 = a_2\left(\operatorname{cth}2H - \frac{5}{2}\operatorname{cth}H\right) - \frac{1}{2}\operatorname{cth}H\left(\operatorname{cth}2H - \frac{1}{2}\operatorname{cth}H\right) - \frac{5}{8},$$

$$a_2 = \tau^2\left[\operatorname{th}2H - 2\tau^2(1 + 2\kappa k\operatorname{th}2H)\right]^{-1}\mu_2,$$

$$a_3 = \tau^2\left[\operatorname{th}3H - 3\tau^2(1 + 3\kappa k\operatorname{th}3H)\right]^{-1}\mu_3,$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2}\operatorname{th}2H - \frac{1}{4}\frac{\operatorname{th}2H}{\operatorname{sh}^2 H} - \operatorname{cth}H - \frac{3}{2}\kappa k\operatorname{cth}H\operatorname{th}2H,$$

$$\mu_3 = l_2 + (l_4 - \kappa k l_0)\operatorname{th}3H, \tag{6.3.5}$$

$$b_2 = \tau\left(a_2 - \frac{1}{2}\operatorname{cth}H\right)\operatorname{ch}2(z+H)\operatorname{sh}^{-1}2H,$$

$$b_3 = \tau\left(a_3 + \frac{1}{3}l_2\right)\operatorname{ch}3(z+H)\operatorname{sh}^{-1}3H,$$

$$\varphi_2^* = \frac{\tau^2}{4}\left(1 + \operatorname{cth}^2 H + 2\kappa k\operatorname{cth}H\right)T_0,$$

$$\varphi_3^* = \tau(l_1 - \sigma_0)\operatorname{ch}(z+H)\operatorname{sh}^{-1}H\sin\theta,$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}\left(l_1 + \tau^2 l_3 + \kappa k\tau^2 l_6\right),$$

при учете нелинейности вертикальных ускорений льдин.

В случае коротких волн

$$a_2 = \frac{1}{2},\; a_3 = \frac{3 + 11\kappa k}{8(1 + 4\kappa k)},\; \sigma_0 = -\frac{4 + 9\kappa k}{8(1 + \kappa k)},$$

а τ, σ_1, ν_1 имеет вид (6.3.2). При этом

$$\lim_{k\to\infty} a_3 = \frac{11}{32},\; \lim_{k\to\infty}\sigma_1\sigma_0 = -\frac{9}{8}\sqrt{\frac{g}{\kappa}},\; \lim_{k\to\infty}\nu_1\sigma_0 = 0.$$

Полагая в (6.3.5)

$$\mu_2 = \frac{1}{2}\operatorname{th}2H - \frac{1}{4}\frac{\operatorname{th}2H}{\operatorname{sh}^2 H} - \operatorname{cth}H$$

и определяя φ_2^*, σ_0 из (6.3.3), а μ_3 из (6.3.4), получим формулы, которые вместе с (6.2.7)–(6.3.1) характеризуют решение задачи без учета нелинейности вертикальных ускорений льдин. При этом в случае глубокой воды ($kH >> 1$)

$$a_2 = \frac{1}{2(1 + 3\kappa k)},\; a_3 = \frac{3(1 - \kappa k)}{8(1 + 3\kappa k)(1 + 4\kappa k)},$$

$$\sigma_0 = -\frac{8 + 17\kappa k + 3\kappa^2 k^2}{16(1 + \kappa k)(1 + 3\kappa k)},\; \lim_{k\to\infty}\sigma_1\sigma_0 = -\frac{1}{16}\sqrt{g/\kappa}.$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} a_2 = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} a_3 = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \nu_1\sigma_0 = 0$, то можно заключить, что в рассматриваемых условиях влияние нелинейных приближений убывает с уменьшением длины волны.

При отсутствии льда ($\kappa = 0$) на глубокой воде $a_2 = 1/2$, $a_3 = 3/8$, $\sigma_0 = -1/2$. Отметим, что значения a_2, a_3 и σ_0 в этом случае такие же, как и в обычном разложении по малому параметру [160].

Для количественной оценки зависимости волновых возмущений от ледовых условий в общем случае проводились численные расчеты для значений

$$\rho_1/\rho = 0.87,\ 0 \le h \le 5\text{м},\ H = 100\ \text{м}. \qquad (6.3.6)$$

Анализ результатов показал усиливающееся влияние нелинейности с ростом амплитуды (крутизны) начальной основной гармоники. Это иллюстрирует приведенные на рис. 6.3.1, 6.3.2 зависимости распределений смещения поверхности бассейна по горизонтальной координате x от амплитуды (рис. 6.3.1) и длины (рис. 6.3.2) волны гармоники начального приближения при h = 2 м и t = 0, полученные по формулам (6.2.7), (6.3.5). Волновые профили вдоль оси x на рис. 6.3.1 соответствуют длине волны $\lambda = 2\pi/k = 5\pi/3$ км гармоники первого приближения, амплитуда которой изменяется в пределах $0.1\ \text{м} \le a \le 1$ м. Зависимость волнового профиля от длины волны начальной гармоники (рис. 6.3.2) дана в случае ее постоянной крутизны при $\varepsilon = 10^{-3}$ и $10\pi \le \lambda/H \le 20\pi$. Таким значениям ε и λ соответствуют изменения амплитуды волны первого приближения в диапазоне $0.5\ \text{м} \le a \le 1$ м.

На переднем плане рис. 6.3.1, 6.3.2 мы видим практически линейную гармоническую волну. Рост амплитуды a (рис. 6.3.1) или длины λ (рис. 6.3.2) волны гармоники линейного приближения ведет к усилению влияния высших гармоник в распределении ζ по x. При этом профиль волны становится нелинейным с пологими синусоидальными впадинами и заостренными гребнями.

С увеличением времени t происходит фазовый сдвиг волнового профиля. Это иллюстрируют графики на рис. 6.3.3, где линии с номерами 1, 2, 3 соответствуют профилям $\zeta(x)$ для t = 0, 30, 60 сек. в случае $\lambda = 5\pi/3$ км, $a = 5/6$ м, h = 2 м. Напомним, что рассматриваются волны, перемещающиеся в отрицательном направлении оси x.

Профили $\zeta(x)$ при отсутствии льда ($\kappa = 0$) для рассмотренных значений a и λ будут примерно такими же, как и на рис. 6.3.1, 6.3.2, 6.3.3. Влияние льда может заметно проявиться только с увеличением времени. В случае длинных волн влияние льда на $\zeta(x)$ сказывается в слабом (не более 5%) уменьшении высоты гребня волны и ее фазовом сдвиге. Причем уменьшение высоты волны проявляется при $t > 3$ минут. Фазовый сдвиг,

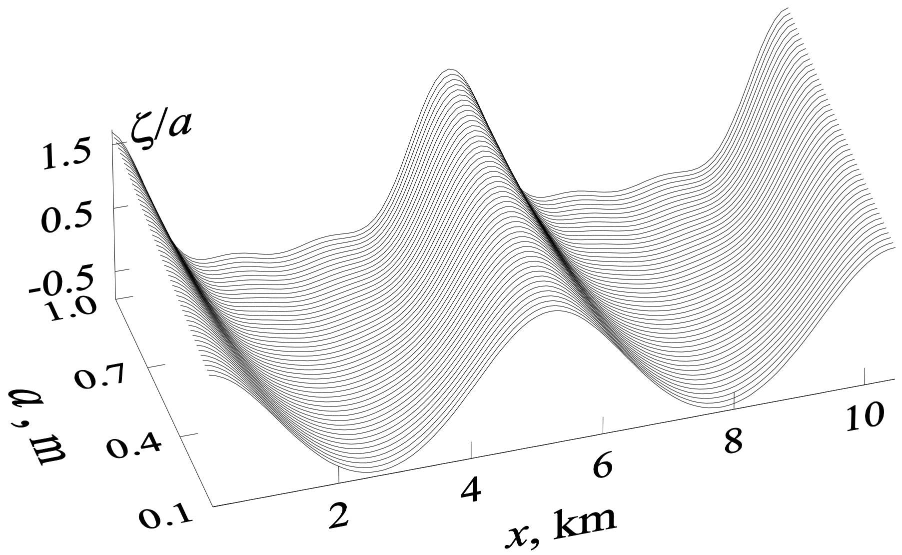

Рис. 6.3.1

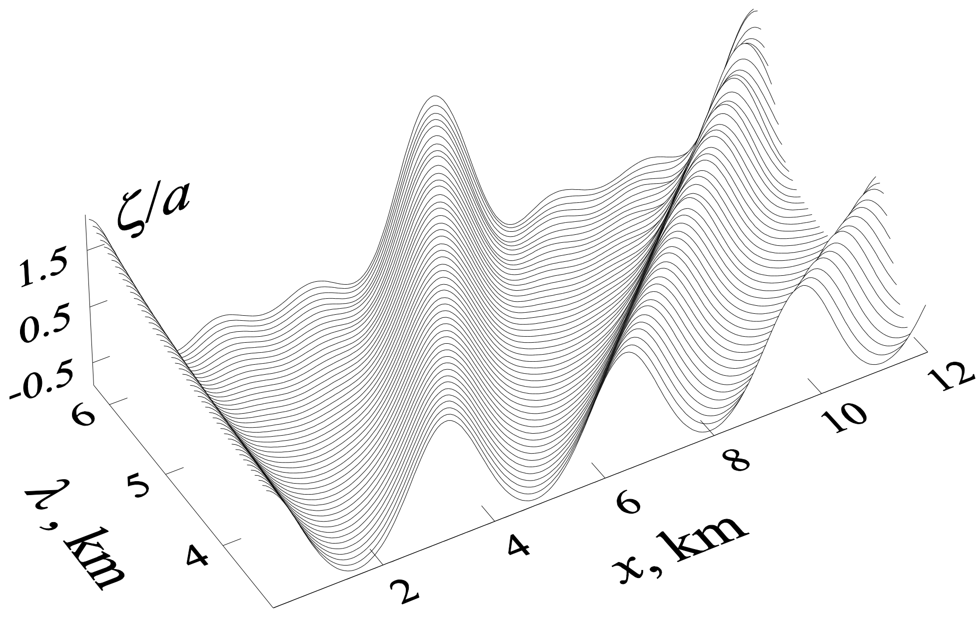

Рис. 6.3.2

обусловленный наличием льда, заметен при значительно большем значении t. Для примера на рис. 6.3.4 даны графики, иллюстрирующие влияние льда на $\zeta(x)$ при $t = 10$ час. Здесь a и λ такие же, как и на рис. 6.3.3. Линии 1, 2, 3 соответствуют толщинам льда 0, 3, 5 м. Плавающий лед уменьшает фазовую скорость бегущих волн, в то время как нелинейность увеличивает ее. Чем короче волна начальной гармоники, тем при меньших значениях t сказывается воздействие льда.

Рассмотрим теперь короткие волны с периодом от 10 сек. до 20 сек. ($5/\pi \leq \lambda/H \leq 20/\pi$) и амплитудой от 0.5 м до 1 м. В этом случае форма волны почти монохроматическая. Обусловленный льдом фазовый сдвиг, равный приблизительно $\pi/5$, для волн с периодом 10 сек. и 20 сек. имеет место при t = 10 сек. и t = 130 сек. соответственно. Вывод о слабом вкладе высших гармоник в $\zeta(x)$ в приближении глубокой воды следует и из рассмотрения выражений для a_2 и a_3.

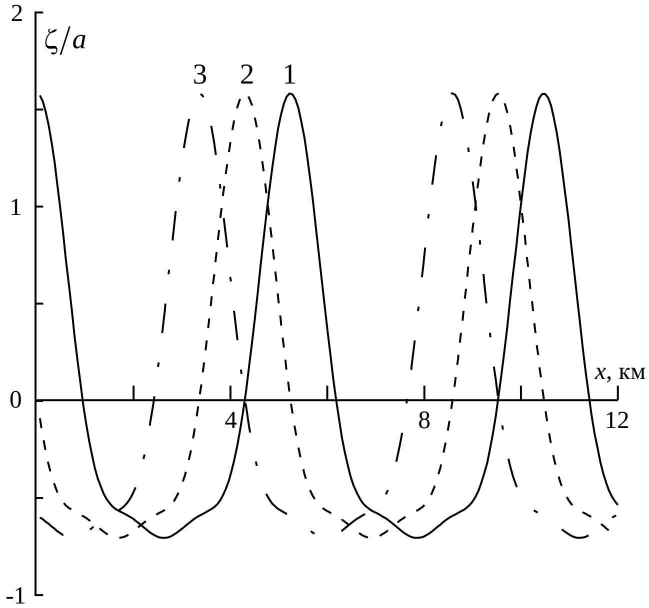

Рис. 6.3.3

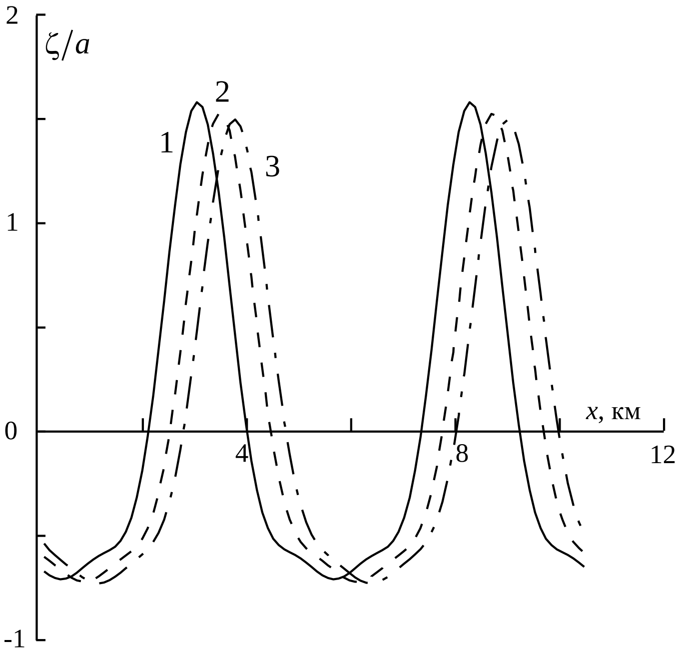

Рис. 6.3.4

Пренебрежение нелинейностью вертикального ускорения льда в динамическом граничном условии на поверхности бассейна приводит к отставанию фазы и слабому уменьшению амплитуды волны. Это влияние, усиливающееся с ростом t, заметно проявляется лишь при больших временах. Причем с увеличением длины волны $\lambda=2\pi/k$ гармоники линейного приближения оно убывает.

Результаты численных расчетов, выполненных с учетом кривизны волнового профиля в выражении потенциала скорости волновых возмущений при выводе кинематического и динамического условий для нелинейных приближений, не проявили заметных количественных отличий от амплитудных значений вертикального смещения поверхности бассейна, полученных в случае $F_2^0 = F_3^0 = L_3^0 = 0$ (рис. 6.3.1, 6.3.2). Аналогичное заключение следует и из сопоставления результатов расчетов, выполненных для больших значений амплитуды гармоники линейного приближения. Волновые профили при 1м $\le a \le$ 2м, h = 2м, t = 0 в случае $F_2^0 \ne 0$, $F_3^0 \ne 0$, $L_3^0 \ne 0$ приведены на рис. 6.3.5 (для $\lambda = 5\pi/3$ км) и рис. 6.3.6 (для $\varepsilon = 2\cdot10^{-3}$). Они остаются примерно такими же и при $F_2 = F_3 = L_3 = 0$. В отличие от профилей на рис. 6.3.1, 6.3.2, здесь из-за большей крутизны (амплитуды) волны начальной гармоники заметнее проявляется влияние нелинейности.

Учет зависимости ζ_0 от x и t в выражении потенциала скорости волновых возмущений при определении граничных условий на поверхности бассейна сказывается главным образом в изменении частоты фазового сдвига (фазовой скорости) возмущений. Изменения частоты фазового сдвига $\beta = -\varepsilon^2\tau\sqrt{kg}\sigma_0$, обусловленного учетом слагаемых F_2^0, F_3^0, L_3^0, характеризуют графики, приведенные на рис. 6.3.7–6.3.10 для $\varepsilon = 0.03$. Сплошные линии на рис. 6.3.7, 6.3.8 характеризуют частоту сдвига для h = 1 м (рис. 6.3.7) и h = 2 м (рис. 6.3.8) без учета, а штриховые с учетом слагаемых F_2^0, F_3^0, L_3^0. При этом линии, отмеченные кружками, получены без учета нелинейности вертикального ускорения льдин. Видно, что пренебрежение нелинейностью вертикального ускорения льдин уменьшает частоту фазового сдвига. Чем короче длина волны линейного приближения, тем существеннее это уменьшение. Учет кривизны волнового профиля в граничных условиях может как уменьшить (при $k < k_0$), хотя и незначительно, так и увеличить (при $k > k_0$) частоту сдвига.

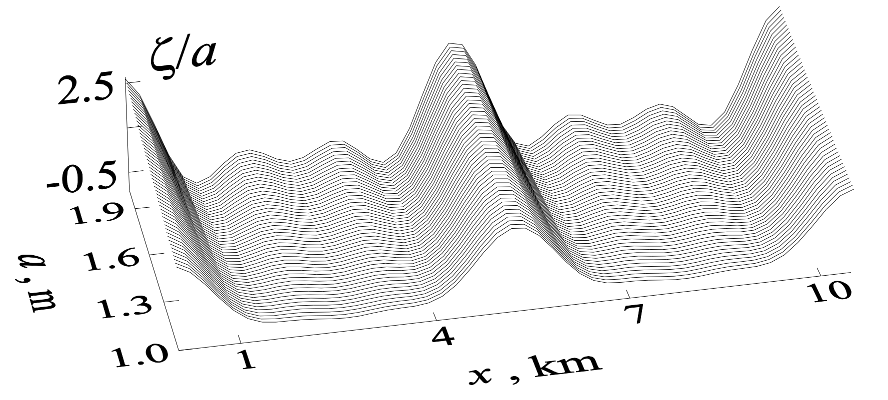

Рис. 6.3.5

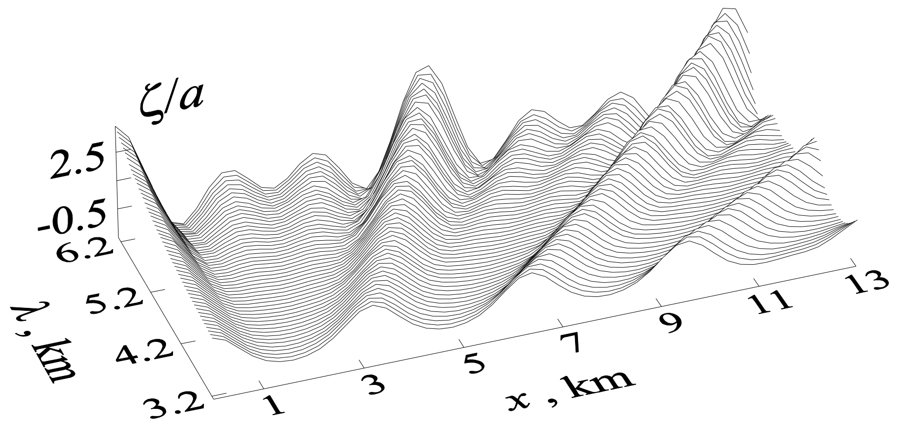

Рис. 6.3.6

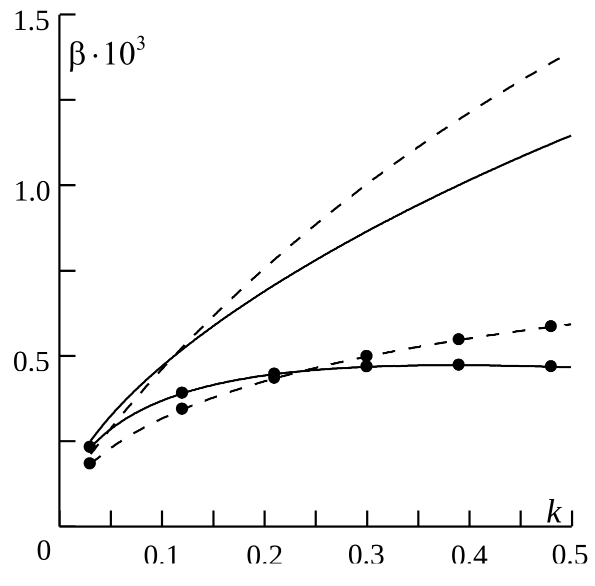

Рис. 6.3.7

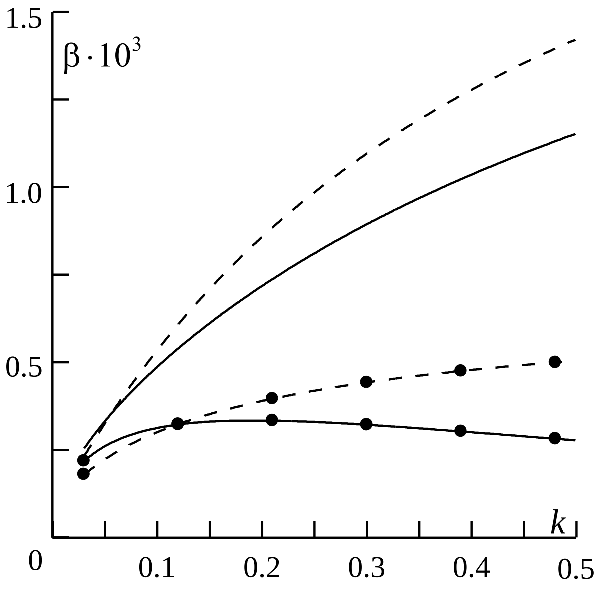

Рис. 6.3.8

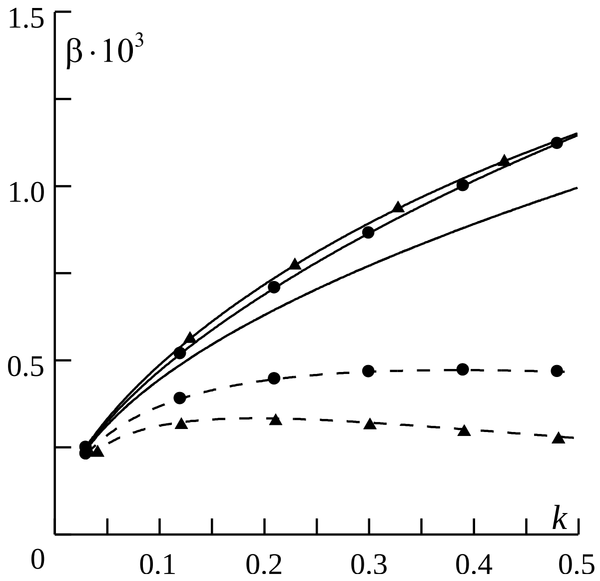

Рис. 6.3.9

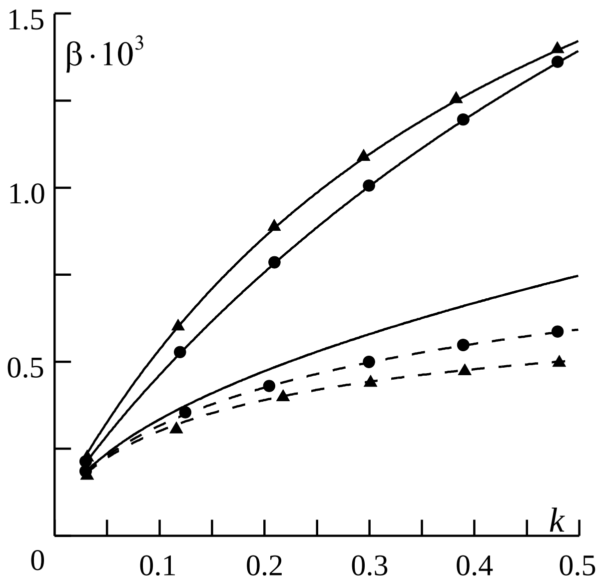

Рис. 6.3.10

Значение k_0 убывает с ростом толщины льда. Влияние толщины льда на частоту сдвига наглядно иллюстрируют графики, полученные без учета (рис. 6.3.9) и с учетом (рис. 6.3.10) слагаемых F_2^0, F_3^0, L_3^0. На этих рисунках сплошные линии характеризуют частоту сдвига на чистой воде (h = 0). Кружками и треугольниками отмечены графики частоты сдвига при толщине льда 1 м и 2 м при учете (сплошные линии) и без учета (штриховые линии) нелинейности его вертикального ускорения. Учет зависимости ζ_0 от x и t при выводе граничных условий для нелинейных приближений при отсутствии льда уменьшает частоту сдвига. Увеличение толщины льда как при учете, так и без учета зависимости потенциала скорости от возмущений поверхности бассейна при определении кинематического и динамического граничных условий для нелинейных приближений уменьшает сдвиговую частоту, если пренебречь нелинейностью вертикального ускорения льдин. Нелинейность же вертикального ускорения льдин увеличивает частоту фазового сдвига. Это влияние усиливается с ростом толщины льда. Сдвиговая частота растет и с увеличением амплитуды (крутизны) волны линейного приближения.

Таким образом показано, что влияние плавающего битого льда может проявляться не только на коротких, но и на длинных периодических бегущих волнах конечной амплитуды. Оно выражается главным образом в фазовом сдвиге волн и усиливается со временем. Плавающий лед тормозит бегущую волну, в то время как нелинейность ускоряет ее. Чем короче волна начальной гармоники, тем раньше по времени сказывается воздействие льда. Пренебрежение нелинейностью вертикального ускорения льдин в динамическом условии на поверхности бассейна также приводит к отставанию фазы и слабому уменьшению амплитуды волны. Это влияние заметно проявляется лишь на больших временах. С увеличением длины волны гармоники линейного приближения оно убывает. Учет кривизны волнового профиля в выражении потенциала скорости при выводе граничных условий для нелинейных приближений при отсутствии льда уменьшает частоту сдвига периодической бегущей волны конечной амплитуды. В ледовых условиях влияние кривизны может проявиться как в уменьшении, так и в увеличении частоты сдвига в зависимости от длины волны гармоники линейного приближения.

ГЛАВА 7. ВЛИЯНИЕ БИТОГО ЛЬДА НА НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

7.1. Выражения для потенциала скорости и возвышения поверхности бассейна при взаимодействии волновых гармоник

Рассмотрим теперь влияние плавающего битого льда на нелинейное взаимодействие периодических бегущих волн [77] первой и второй гармоник в неограниченном в горизонтальных направлениях слое однородной идеальной несжимаемой жидкости [91]. При этом пренебрежем нелинейностью вертикального ускорения льдин, принимая во внимание слабое его влияние на амплитуду формируемого бегущей волной конечной амплитуды возвышения поверхности бассейна (раздел 6.3). Тогда для определения нелинейных приближений в общем случае неустановившихся возмущений конечной амплитуды получим уравнения (6.1.21)–(6.1.25) с той разницей, что выражения F_n^*, L_n^* примут вид

$$F_n^* = P_n + P_n^0 \,,\ L_n^* = L_n + L_n^0 \,,\ P_1 = L_1 = P_1^0 = L_1^0 = L_2^0 = 0 \,,$$

$$P_2 = \zeta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial T_1} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)^2\right] - 2\kappa k \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial T_0 \partial T_1} \,,$$

$$L_2 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1} - \zeta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \,,$$

$$P_3 = \zeta_1 N_1 + \frac{1}{2}\zeta_1^2 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z^2} + \zeta_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial T_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial T_2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} -$$

$$- \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \kappa k N_2 \,,$$

$$N_1 = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_1 \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial T_0 \partial z} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \,, \tag{7.1.1}$$

$$N_2 = \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial T_1^2} + 2\frac{\partial^2 \zeta_2}{\partial T_0 \partial T_1} + 2\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial T_0 \partial T_2} \,,$$

$$L_3 = \zeta_1\left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2}\right) - \frac{1}{2}\zeta_1^2 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^3} - \zeta_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + N_3 \,,$$

$$N_3 = \frac{\partial \zeta_2}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_2} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial T_1} \,,$$

$$P_2^0 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0}\frac{\partial \varphi_1}{\partial z},\ L_3^0 = \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \,,$$

$$P_3^0=\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_0}\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}+\zeta_1\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_0}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}+\left(\frac{\partial\zeta_2}{\partial T_0}+\frac{\partial\zeta_1}{\partial T_1}-\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}.$$

Слагаемые P_n^0, L_n^0 обусловлены учетом зависимости ζ от x и t при нахождении скорости φ_x горизонтальных поверхностных волновых течений (6.1.17) и производной φ_t из выражения (6.1.15) для потенциала скорости φ на поверхности бассейна.

Для решения задачи (6.1.21)–(6.1.25), (7.1.1) в рассматриваемом случае зададим первое приближение (n = 1) возмущений поверхности бассейна в форме

$$\zeta_1=\cos\theta+a_1\cos 2\theta,\ \theta=x+\tau T_0+\beta_1(T_1,T_2), \tag{7.1.2}$$

где a_1 постоянная порядка единицы, а β_1 = 0 при t = 0. Удовлетворяя условию на дне и учитывая взаимосвязь волновых характеристик через граничные условия (6.1.22), (6.1.23), запишем

$$\varphi_1=\tau\left[\frac{\mathrm{ch}(z+H)}{\mathrm{sh}H}\sin\theta+a_1\frac{\mathrm{ch}2(z+H)}{\mathrm{sh}2H}\sin 2\theta\right], \tag{7.1.3}$$

$$\tau^2=\tau_0^{-1}\mathrm{th}H,\ \tau_0=1+\kappa k\,\mathrm{th}H.$$

Амплитуду a_1 и фазовый сдвиг β_1 определим из последующих приближений. Подставим ζ_1, φ_1 из (7.1.2), (7.1.3) в правые части (7.1.1) динамического (6.1.22) и кинематического (6.1.23) граничных условий для второго приближения и решив задачу (6.1.21)–(6.1.24), (7.1.1) при n = 2 с учетом требования отсутствия первой и второй гармоник в частном решении, получим

$$\zeta_2=a_2\cos 2\theta+\sum_{n=3}^{4}a_{2n}\cos n\theta, \tag{7.1.4}$$

$$\varphi_2=\tau^2 b_{20}t+\tau\sum_{n=1}^{4}b_{2n}\mathrm{ch}n(z+H)\mathrm{sh}^{-1}nH\sin n\theta, \tag{7.1.5}$$

$$a_1=\pm\frac{1}{2}\left[\frac{\tau_0}{\tau_*}\left(\frac{2}{3}\mathrm{cth}H\,\mathrm{th}2H+\frac{1}{6}\left(\mathrm{cth}^2H-5\right)\mathrm{th}^2 2H\right)\right]^{1/2}, \tag{7.1.6}$$

$$\tau_*=1+2\kappa k\,\mathrm{th}2H,\ \beta_1=\varepsilon\tau_1 t+\beta_2(T_2),\ \tau_1=\frac{3}{2}a_1\tau\tau_0^{-1}\mathrm{cth}2H.$$

Здесь

$$a_{2n}=-a_1\tau^2F_n\mu_n^{-1}, n=3{,}4,\ \mu_n=\left(1-n^2\kappa k\tau^2\right)\mathrm{th}nH-n\tau^2,$$

$$F_3=\frac{1}{2}\left[3(2\mathrm{cth}2H+\mathrm{cth}H)+(2\mathrm{cth}H\mathrm{cth}2H-11)\mathrm{th}3H\right],$$

$$F_4=\left[4\mathrm{cth}2H+\left(\mathrm{cth}^2 2H-5\right)\mathrm{th}4H\right]a_1,$$

$$b_{20}=\frac{1}{4}\left[1+\mathrm{cth}^2H+4a_1^2(1+\mathrm{cth}^2 2H)\right],\ b_{21}=-\frac{1}{2}(2\mathrm{cth}2H+\mathrm{cth}H)a_1+\sigma_1,$$

$$b_{22}=a_2+a_0,\ b_{23}=a_{23}-\frac{1}{2}(2\mathrm{cth}2H+\mathrm{cth}H)\,a_1,\ b_{24}=a_{24}-a_1^2\mathrm{cth}2H\,,$$

$$a_0=a_1\sigma_1-\frac{1}{2}\mathrm{cth}H\,,\ \sigma_1=\frac{\tau_1}{\tau},$$

а выражения для a_2 и β_2 определим из третьего приближения. Выражения для ζ_1, φ_1 из (7.1.2), (7.1.3), (7.1.6) и ζ_2, φ_2 из (7.1.4), (7.1.5), (7.1.6) определяют правые части динамического (6.1.22) и кинематического (6.1.23) условий при n = 3. Исключив из них слагаемые, порождающие секулярность, найдем

$$a_2=\frac{1}{2}(\omega_2-\delta)/\omega_1\,,\ \beta_2=\varepsilon^2\tau_2 t\,,\ \delta=\tau(\gamma_2-q_2\mathrm{th}2H)/(4a_1\tau_*),$$

$$\tau_2=\omega_2-\omega_1 a_2\,,\ \omega_1=-\tau_1/a_1\,,\ \omega_2=\frac{1}{2}(\gamma_1-q_1\mathrm{th}H)\tau/\tau_0\,,$$

$$\gamma_1=\frac{1}{2}a_1(b_{21}\mathrm{cth}H+3b_{23}\mathrm{cth}3H)+(a_0+a_1a_{23})\,\mathrm{cth}2H-\frac{15}{4}a_1^2-\frac{3}{8},$$

$$\gamma_2=(b_{21}+a_{23})\mathrm{cth}H+a_1(2a_{24}\mathrm{cth}2H+4b_{24}\mathrm{cth}4H)+3\left(b_{23}\mathrm{cth}3H-a_1^3\right),$$

$$q_1=\sum_{n=1}^{4}q_{1n}\,,\ q_2=\sum_{n=1}^{4}q_{2n}\,, \tag{7.1.7}$$

$$q_{11}=a_1\left(\frac{5}{2}\sigma_1-\frac{1}{2}b_{21}+2a_{23}\right)+a_0+\kappa k\sigma_1^2,$$

$$q_{12}=\left(\sigma_1 b_{21}-\frac{7}{4}a_1^2-\frac{5}{8}\right)\mathrm{cth}H-5a_1^2\mathrm{cth}2H\,,$$

$$q_{13}=a_1b_{23}\left(\frac{3}{2}-3\mathrm{cth}2H\mathrm{cth}3H\right)-(a_0+a_1b_{21})\mathrm{cth}H\mathrm{cth}2H\,,$$

$$q_{14}=-\left\{a_0+a_1[b_{21}+2\sigma_1-3(b_{23}+a_{23})]+2a_1^2(\mathrm{cth}H-2\mathrm{cth}2H)+1/2\,\mathrm{cth}H\right\},$$

$$q_{21}=\left(2a_0\sigma_1-5a_1^3+a_1\right)\mathrm{cth}2H-\frac{5}{2}a_1\mathrm{cth}H\,,$$

$$q_{22}=4a_1b_{24}(1-\mathrm{cth}2H\,\mathrm{cth}4H)+b_{21}\left(1-\frac{1}{2}\mathrm{cth}^2H\right)+\frac{3}{2}b_{23}(2-\mathrm{cth}H\mathrm{cth}3H),$$

$$q_{23}=2a_1\left(a_{24}+2\kappa k\sigma_1^2\right)+\frac{1}{2}(a_{23}+\sigma_1),$$

$$q_{24}=\frac{1}{2}(\sigma_1+b_{21})-a_1[4(a_{24}+b_{24})+\mathrm{cth}H-\mathrm{cth}2H]-\frac{3}{2}(a_{23}+b_{23}).$$

Тогда решение задачи для третьего приближения (n = 3) имеет вид

$$\zeta_3=a_3\cos 2\theta+\sum_{n=3}^{6}a_{3n}\cos n\theta, \tag{7.1.8}$$

$$\varphi_3 = \tau^2 b_{30} t + \tau \sum_{n=1}^{6} b_{3n} \mathrm{ch} n(z+H) \mathrm{sh}^{-1} nH \sin n\theta, \qquad (7.1.9)$$

где

$$a_{3n} = \tau^2 \left(q_n \mathrm{th}\, nH - \gamma_n \right) \mu_n^{-1}, \; n = 3, 4, 5, 6,$$

$$\gamma_3 = \gamma_{31} + \gamma_{32}, \; \gamma_{31} = \frac{3}{8} a_1^2 - 3 a_{23} \sigma_1 + \frac{1}{8},$$

$$\gamma_{32} = \frac{3}{2} (b_{21} a_1 + a_2 + a_{24}) \mathrm{cth} H + 3 (a_0 + a_2) \mathrm{cth}\, 2H + 6 b_{24} \mathrm{cth}\, 4H,$$

$$\gamma_4 = 2 a_{23} \mathrm{cth} H + a_1 \left[4 (2a_2 + a_0) \mathrm{cth}\, 2H + \frac{9}{2} \right] + 6 b_{23} \mathrm{cth}\, 3H - 4 a_{24} \sigma_1,$$

$$\gamma_5 = \frac{5}{2} a_{24} \mathrm{cth} H + a_1 \left(5 a_{23} \mathrm{cth}\, 2H + \frac{15}{2} b_{23} \mathrm{cth}\, 3H \right) + 10 b_{24} \mathrm{cth}\, 4H + \frac{69}{8} a_1^2,$$

$$\gamma_6 = a_1 (6 a_{24} \mathrm{cth}\, 2H + 12 b_{24} \mathrm{cth}\, 4H) + 5 a_1^2,$$

$$q_3 = \sum_{n=1}^{4} q_{3n}, \; q_4 = \sum_{n=1}^{3} q_{4n}, \; q_5 = \sum_{n=1}^{3} q_{5n},$$

$$q_6 = a_1 \left[4 b_{24} (3 - \mathrm{cth}\, 2H \mathrm{cth}\, 4H) + a_1^2 \mathrm{cth}\, 2H + 2 a_{24} \right] + q_{61},$$

$$q_{61} = 4 a_1 (b_{24} + a_{24}),$$

$$q_{31} = a_2 \left(\frac{7}{2} - \mathrm{cth} H \mathrm{cth}\, 2H \right) + 3 (b_{23} \mathrm{cth}\, 3H + 6 \kappa k a_{24}) \sigma_1,$$

$$q_{32} = a_1 \left[b_{21} \left(\frac{3}{2} - \mathrm{cth} H \mathrm{cth}\, 2H \right) + \frac{5}{2} \sigma_1 \right] - a_1^2 \left(\frac{11}{8} \mathrm{cth} H - \frac{1}{2} \mathrm{cth}\, 2H \right),$$

$$q_{33} = 2 b_{24} (3 - \mathrm{cth} H \mathrm{cth}\, 4H) + a_0 (3 + \mathrm{cth} H \mathrm{cth}\, 2H) + \frac{1}{8} \mathrm{cth} H + \frac{1}{2} a_{24},$$

$$q_{34} = a_0 + 2 a_2 + a_1 (b_{21} + 2\sigma_1) - 2 (b_{24} + a_{24}) + a_1^2 \left(3 \mathrm{cth}\, 2H - \frac{1}{2} \mathrm{cth} H \right),$$

$$q_{41} = 2\sigma_1 \left[2 (b_{24} \mathrm{cth}\, 4H + 8 \kappa k a_{24}) + a_1^2 \right] + \frac{3}{2} b_{23} (4 - \mathrm{cth} H \mathrm{cth}\, 3H),$$

$$q_{42} = 2 a_1 \left[a_2 (3 - \mathrm{cth}^2 H) + a_0 (2 - \mathrm{cth}^2 2H) + \frac{3}{4} \mathrm{cth}\, 2H - \frac{1}{8} \mathrm{cth} H \right] + \frac{1}{2} a_{23},$$

$$q_{43} = 2 a_1^2 \sigma_1 + \frac{3}{2} (a_{23} + b_{23}) + a_1 \left(4 a_2 + 2 a_0 + \frac{3}{4} \mathrm{cth} H - \frac{1}{2} \mathrm{cth}\, 2H \right),$$

$$q_{51} = 2 b_{24} (5 - \mathrm{cth} H \mathrm{cth}\, 4H) + \frac{1}{2} a_{24} - a_1^2 \left(\frac{3}{8} \mathrm{cth} H - \frac{5}{2} \mathrm{cth}\, 2H \right),$$

$$q_{52} = 2 a_1 \left[a_{23} + \frac{3}{4} b_{23} (5 - 2 \mathrm{cth}\, 2H \mathrm{cth}\, 3H) \right],$$

$$q_{53} = 2b_{24} + 3a_1(a_{23} + b_{23}) + a_1^2\left(\operatorname{cth}2H - \frac{1}{2}\operatorname{cth}H\right) + 2a_{24},$$

$$b_{30} = 1/2\left[\sigma_1\left(1 + 4a_1^2\right) - b_{21}\operatorname{cth}^2 H\right] - 2a_1\left[b_{22}\operatorname{cth}^2 2H + \right.$$

$$\left. + 1/8(5\operatorname{cth}H + 2\operatorname{cth}2H - a_2)\right] + b_{30}^0,$$

$$b_{30}^0 = -\frac{1}{2}\left\{\sigma_1\left(1 + 4a_1^2\right) + b_{21} + a_1\left[4b_{22} + 4a_2 + \frac{1}{4}(3\operatorname{cth}H - 2\operatorname{cth}2H)\right]\right\},$$

$$b_{3n} = (na_{3n} + \gamma_n)/n,\ a_{31} = -\sigma_2 + a_2\operatorname{cth}H\operatorname{cth}2H,$$

$$a_{32} = a_3 + (a_1\sigma_2 + a_2\sigma_1),\ \sigma_2 = \tau_2/\tau,$$

а величина a_3 может быть определена из уравнений для четвертого приближения.

Таким образом, возмущение покрытой битым льдом поверхности бассейна конечной глубины при нелинейном взаимодействии периодических прогрессивных волн первой и второй гармоник до величин третьего порядка определяются выражением

$$\zeta = \varepsilon\cos\theta + \sum_{n=1}^{3}\varepsilon^n a_n \cos 2\theta + \sum_{n=2}^{3}\varepsilon^n \sum_{j=3}^{4} a_{nj}\cos j\theta + \varepsilon^3 \sum_{n=5}^{6} a_{3n}\cos n\theta, \quad (7.1.10)$$

$$\theta = x + \sigma t,\ \sigma = \tau\left(1 + \varepsilon\sigma_1 + \varepsilon^2\sigma_2\right), \sigma_1 = \tau_1/\tau, \sigma_2 = \tau_2/\tau.$$

Фазовую скорость волновых возмущений определим по формуле

$$v = \tau k^{-1}\left(1 + \varepsilon\sigma_1 + \varepsilon^2\sigma_2\right).$$

Соответствующее выражение на основании формул (7.1.3), (7.1.5), (7.1.9) можно записать и для потенциала скорости

$$\varphi = \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \varepsilon^3\varphi_3. \quad (7.1.11)$$

В размерных переменных ($x = x/k, t = t/\sqrt{kg}, \zeta = \zeta/k, a = \varepsilon/k$, где a и k амплитуда и волновое число основной линейной гармоники) выражения для возвышения поверхности бассейна и потенциала скорости примут вид

$$\zeta = a\zeta_1 + a^2 k\zeta_2 + a^3 k^2\zeta_3, \quad (7.1.12)$$

$$\varphi = a\sqrt{g/k}\varphi_1 + a^2\sqrt{kg}\varphi_2 + a^3 k\sqrt{kg}\varphi_3. \quad (7.1.13)$$

При этом

$$\theta = kx + \sigma t, \sigma = \tau\sqrt{kg}\left(1 + ak\sigma_1 + a^2k^2\sigma_2\right),$$

$$v = \tau\sqrt{g/k}\,(1 + ak\sigma_1 + a^2k^2\sigma_2).$$

Формулы (7.1.10)–(7.1.13) для ζ и φ определяют формируемое волновое возмущение и при отказе от учета кривизны волнового профиля в выражении для потенциала скорости (6.1.15) на поверхности бассейна [21, 131]. Однако в таком случае ($P_2^0 = P_3^0 = L_3^0 = 0$) следует учесть, что

$$a_1 = \pm\frac{1}{2}\left[\tau_0\tau_*^{-1}\mathrm{cth}H\,\mathrm{th}\,2H\right]^{1/2}, \qquad (7.1.14)$$

$$\tau_1 = \frac{a_1\tau}{4\tau_0}\left(4\mathrm{cth}\,2H + \mathrm{cth}H - 3\mathrm{th}H\right),$$

$$b_{20} = \frac{1}{4}\left[\mathrm{cth}^2 H - 1 + 4a_1^2\left(\mathrm{cth}^2\,2H - 1\right)\right],$$

$$F_3 = \frac{1}{2}\left[3\left(2\mathrm{cth}\,2H + \mathrm{cth}H\right) + \left(2\mathrm{cth}H\,\mathrm{cth}\,2H - 7\right)\mathrm{th}\,3H\right],$$

$$F_4 = \left[4\mathrm{cth}\,2H + \left(\mathrm{cth}^2\,2H - 3\right)\mathrm{th}\,4H\right]a_1,$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}a_1\left(b_{21}\mathrm{cth}H + 3b_{23}\mathrm{cth}\,3H\right) + \left(a_0 + a_1a_{23}\right)\mathrm{cth}\,2H + \frac{9}{4}a_1^2 + \frac{3}{8},$$

$$\gamma_2 = \left(b_{21} + a_{23}\right)\mathrm{c}th H + a_1(2a_{24}\mathrm{cth}\,2H + 4b_{24}\mathrm{cth}\,4H + 3) + 3\left(b_{23}\mathrm{cth}\,3H + a_1^3\right),$$

$$\gamma_{31} = \frac{27}{8}a_1^2 - 3a_{23}\sigma_1 + \frac{3}{8},$$

$$\gamma_4 = 2a_{23}\mathrm{cth}H + a_1\left[4\left(2a_2 + a_0\right)\mathrm{cth}\,2H + 3\right] + 6b_{23}\mathrm{cth}\,3H - 4a_{24}\sigma_1,$$

$$\gamma_5 = \frac{5}{2}a_{24}\mathrm{cth}H + a_1\left(5a_{23}\mathrm{cth}\,2H + \frac{15}{2}b_{23}\mathrm{cth}\,3H\right) + 10b_{24}\mathrm{cth}\,4H + \frac{45}{8}a_1^2,$$

$$\gamma_6 = a_1\left(6a_{24}\mathrm{cth}\,2H + 12b_{24}\mathrm{cth}\,4H\right) + 3a_1^3,$$

$$q_1 = \sum_{n=1}^{3} q_{1n},\ q_2 = \sum_{n=1}^{3} q_{2n},\ q_3 = \sum_{n=1}^{3} q_{3n},\ q_4 = \sum_{n=1}^{2} q_{4n},\ q_5 = \sum_{n=1}^{2} q_{5n},$$

$$q_{14} = q_{24} = q_{34} = q_{43} = q_{53} = q_{61} = b_{30}^0 = 0.$$

Все другие обозначения остаются прежними.

7.2. Анализ амплитудно-фазовых характеристик формируемого волнового возмущения

Из полученных в разделе 7.1 соотношений следует, что частота σ и фазовая скорость ν зависит от амплитуд взаимодействующих гармоник. Причем влияние амплитуд в ледовых условиях и при отсутствии льда сказывается как в первом, так и во втором приближениях. В случае $a_1 = 0$ частота и фазовая скорость распространения волн конечной амплитуды в бассейне со свободной и покрытой льдом поверхностью зависит от амплитуды начальной линейной гармоники только во втором приближении [2, 26, 60, 86, 87, 95, 102, 112, 130, 152, 160].

Величина $\sigma_0 = \tau\sqrt{kg}\sigma_1$, характеризующая фазовый сдвиг колебаний в приближении порядка ε, в случае $kH >> 1$(короткие волны) обращается в нуль. На мелкой воде (длинные волны) [14, 76, 126]

$$\sigma_0 = \pm\frac{3\sqrt{2}}{8}\sqrt{\frac{g}{H}}\frac{1}{1+\kappa k^2 H}\sqrt{\frac{\left(3-5k^2H^2\right)}{3\left(1+4\kappa k^2 H\right)}},\ \lim_{k\to 0}\sigma_0 = \frac{3\sqrt{2}}{8}\sqrt{\frac{g}{H}}. \quad (7.2.15)$$

Если пренебречь кривизной волнового профиля в выражении для φ на поверхности бассейна, то

$$\sigma_0 = \pm\frac{1}{4(1+\kappa k)}\sqrt{\frac{kg}{1+2\kappa k}},\ \lim_{k\to\infty}\sigma_0 = 0 \quad (7.2.16)$$

для глубокой воды и

$$\sigma_0 = \pm\frac{1}{4}\sqrt{\frac{g}{2H}}\frac{3-(kH)^2}{\left(1+\kappa k^2 H\right)\sqrt{1+4\kappa k^2 H}},\ \lim_{k\to 0}\sigma_0 = \frac{3\sqrt{2}}{8}\sqrt{\frac{g}{H}} \quad (7.2.17)$$

в длинноволновом приближении [41]. Направленность этого фазового сдвига, обусловленного участием второй гармоники в формировании волнового движения, определяется знаком при a_1. Из (7.2.16) следует, что в случае $P_n^0 = L_n^0 = 0$, $n = 1, 2, 3$ функция $\sigma_0(k)$ для коротких волн в ледовых условиях имеет локальный максимум при

$$k = \frac{1}{8\kappa}\left(\sqrt{17}-1\right). \quad (7.2.18)$$

Этот максимум определяется выражением

$$\sigma_0^m = \frac{2\sqrt{g}}{7+\sqrt{17}}\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2\kappa\left(3+\sqrt{17}\right)}}. \quad (7.2.19)$$

Он ограничивает сверху интервал смещения частоты в приближении порядка ε. Величина максимума убывает с ростом толщины льда.

Из полученных формул (7.2.15), (7.2.17) можно заключить, что с увеличением длины волны λ (уменьшением волнового числа k) влияние учета кривизны волнового профиля на частоту фазового сдвига σ_0 убывает. С ростом толщины льда величина σ_0 также убывает.

Чтобы оценить зависимость волнового возмущения от ледовых условий и характеристик взаимодействующих гармоник проводились численные расчеты при значениях (6.3.6).

Остановимся сначала на результатах расчетов распределений высоты вертикальных смещений поверхности бассейна вдоль направления перемещения волновых возмущений, полученных по формулам (7.2.12), (7.2.14) без учета кривизны взволнованной поверхности в выражении потенциала скорости на поверхности бассейна ($P_n^0 = L_n^0 = 0$, $n = 1, 2, 3$). Зависимость таких распределений от амплитуды a и длины волны

$\lambda = 2\pi/k$ основной гармоники показана на рис. 7.2.1, 7.2.3 при $a_1 > 0$ и на рис. 7.2.2, 7.2.4 при $a_1 < 0$. Волновые профили вдоль оси x на этих рисунках даны при h = 2 м, t = 0. На рис. 7.2.1, 7.2.2 они отвечают длине волны основной гармоники $\lambda = 2\pi \cdot 10^2$м, амплитуда которой изменяется в пределах 0.1 м $\leq a \leq$ 1 м. Соответствующие этим значениям a величины ε, характеризующие крутизну волны, при рассматриваемой длине λ изменяются в диапазоне $10^{-3} \leq \varepsilon \leq 10^{-2}$. Волновые профили на рис.7.2.3, 7.2.4 приведены в случае постоянной крутизны волны основной гармоники, определяемой значением $\varepsilon = 10^{-3}$, и $\pi/5$ км $\leq \lambda \leq \pi/3$ км. Таким значениям ε и λ соответствуют изменения амплитуды основной гармоники от 0.1 м до 1/6 м.

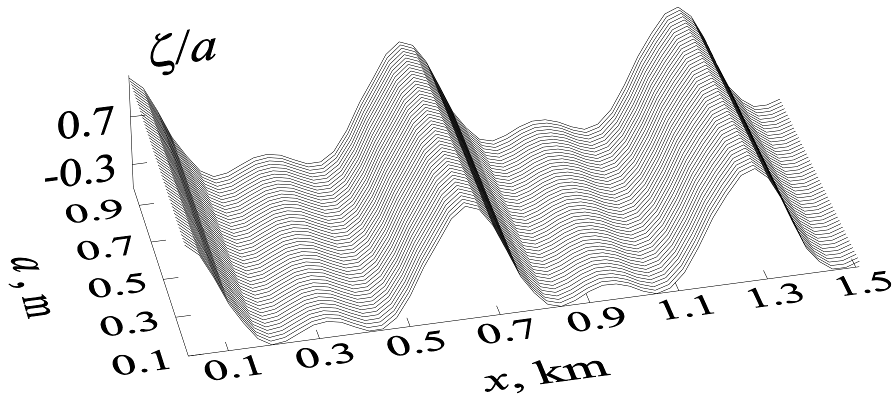

Рис. 7.2.1

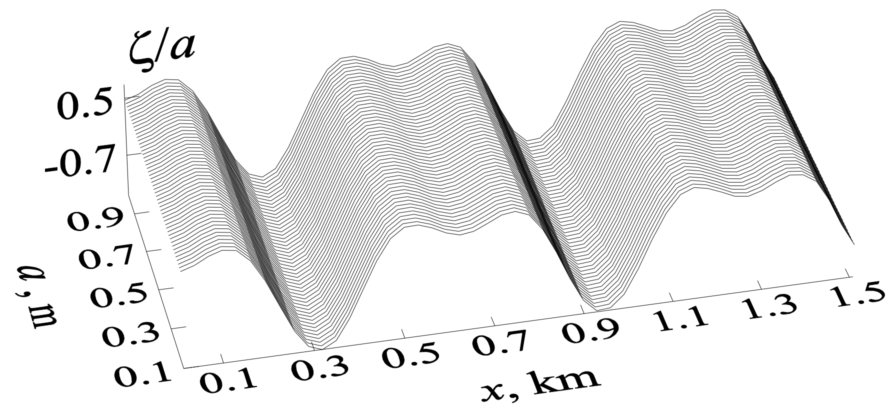

Рис. 7.2.2

Из сопоставления профилей возмущений $\zeta(x)$ приведенных на рис. 7.2.1, 7.2.3 и на рис. 7.2.2, 7.2.4 видно, что изменение начальной фазы второй гармоники на противоположную деформирует пространственное распределение ζ и количественно и качественно. В случае $a_1 > 0$ максимальные смещения поверхности бассейна проявляются в виде всплесков, в то время как при $a_1 < 0$ в виде впадин.

С увеличением t происходит фазовый сдвиг возмущений. Смещение пространственного профиля волновых возмущений со временем в направлении их распространения показывают графики на рис. 7.2.5 для $a_1 > 0$ и рис. 7.2.6 для $a_1 < 0$ в случае $\varepsilon = 10^{-3}$, $h = 0$ и $kH = 0.1$. Линии 1 приведены для $t = 0$, а линии 2 при $t = 30$ сек. (рис. 7.2.6) и $t = 60$ сек. (рис. 7.2.5). Напомним, что рассматриваются волны, бегущие в отрицательном направлении оси x.

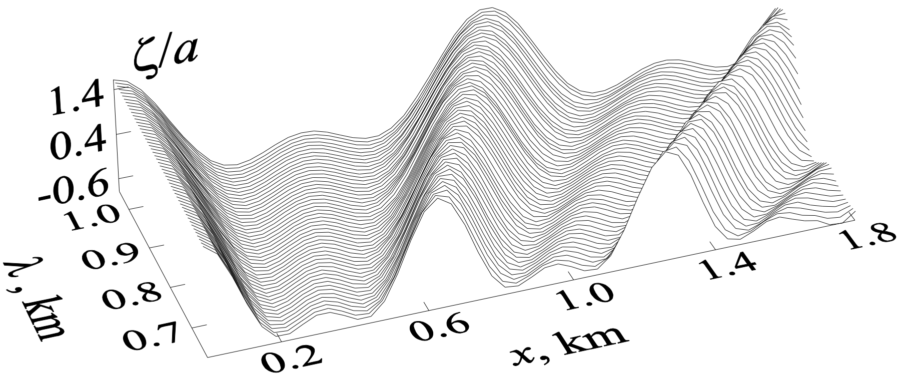

Рис.7.2.3

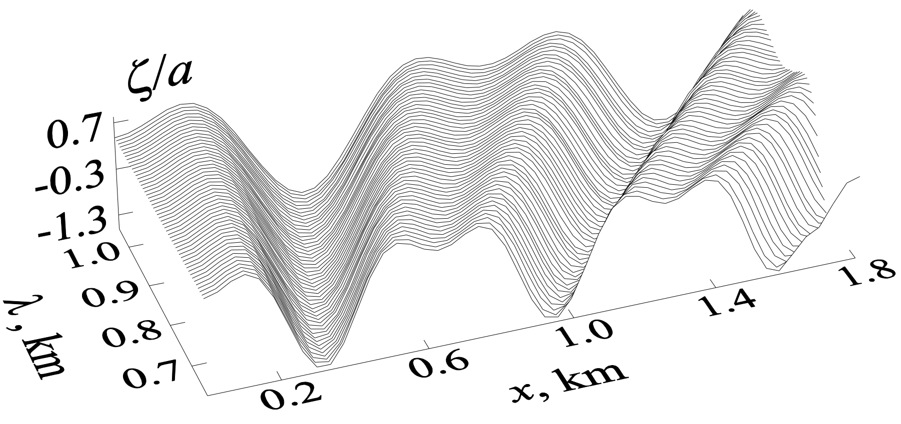

Рис.7.2.4

Сдвигается фаза колебаний и с увеличением толщины льда. Это влияние усиливается со временем. Чем большая длина волны начальной гармоники, тем позднее по времени обнаруживаются фазовые отличия, обусловленные эффектом льда. В частности, при $\varepsilon = 10^{-3}$, $kH = 0.1$ они становятся заметными только при $t > 10$ час., а при $\varepsilon = 10^{-1}$, $kH = 10$ уже при $t > 10$ сек. Направленность фазовых изменений за счет льда при изменении начальной фазы второй гармоники (знака при a_1) на противоположную сохраняется. При этом в случае $a_1 < 0$ влияние льда и нелинейности [79, 88] направлено на уменьшение начальной частоты колебаний (уменьшение фазовой скорости распространения возмущений). Если $a_1 > 0$, то лед уменьшает, а нелинейность увеличивает скорость смещения пространственного профиля возмущений. В этом случае в приближении глубокой воды при $k < \varepsilon/(2\kappa)$ влияние нелинейности сильнее, чем влияние ледяного покрова. При $k > \varepsilon/(2\kappa)$ имеет место обратное явление. В приближении мелкой воды и $a_1 > 0$ влияние льда проявляется на фазовом сдвиге сильнее, чем влияние нелинейности, если $k > k_0$, где

$$k_0 = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{2\sqrt{2}\kappa H^2}}\,.$$

Если $k < k_0$, то нелинейность ускоряет волны сильнее, чем лед тормозит их.

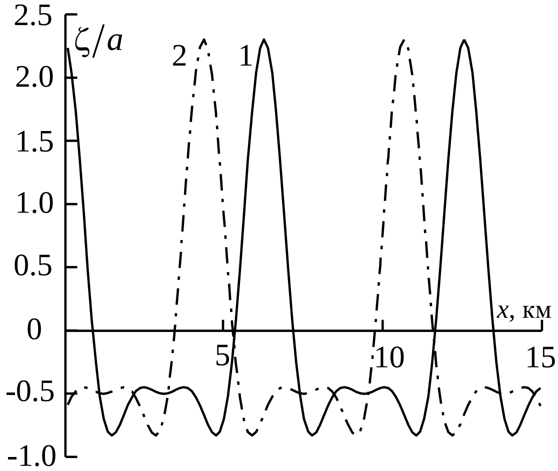

Рис.7.2.5

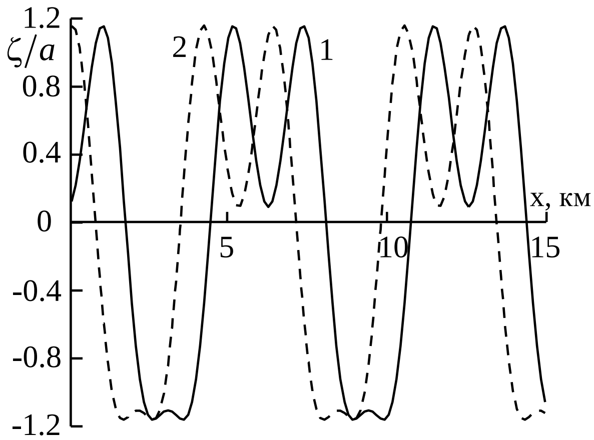

Рис.7.2.6

В случае коротких волн влияние льда проявляется не только в уменьшении фазовой скорости, но и в уменьшении (хотя и слабом) их высоты. Причем эффект уменьшения высоты волн ярче проявляется при положительном значении a_1, чем при отрицательном. Это показывают графики на рис. 7.2.7 (для $a_1 > 0$) и на рис. 7.2.8 ($a_1 < 0$), приведенные для $\varepsilon = 10^{-1}$, $kH = 10$, $t = 15$ сек. Здесь линии с номером 1 отвечают случаю открытой воды ($h = 0$), а линии с номером 2 толщине льда $h = 3$ м (рис. 7.2.7) и $h = 5$м (рис. 7.2.8).

Напомним, что величина a_3, имеющая одинаковый порядок с a_{3n} ($n = 3$–6) и определяющая вместе с ними решение в третьем приближении, может быть найдена только из четвертого приближения. Поэтому при численных расчетах профилей $\zeta(x)$ она не учитывалась. Однако с целью ориентировочной оценки допускаемой при этом ошибки (величины вклада третьего приближения) расчеты проводились как при

$a_{3n} = 0$, так и $a_{3n} \neq 0$. Их сопоставление не выявило принципиальных качественных отличий полученных результатов. Пренебрежение величинами a_{3n} привело лишь к незначительному уменьшению экстремальных значений ζ и слабому сглаживанию вершин поднятий и оснований впадин. Причем это влияние убывает с уменьшением длин волн начальных гармоник.

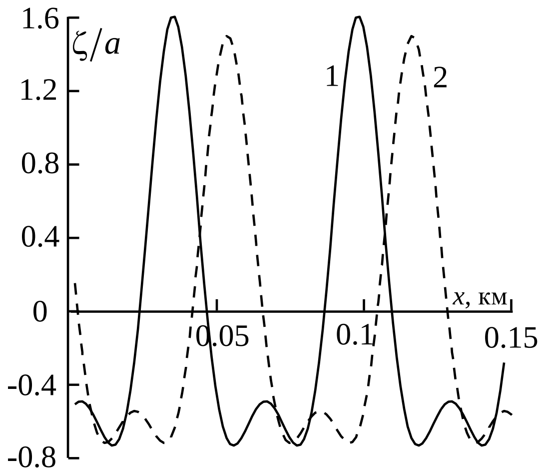

Рис. 7.2.7

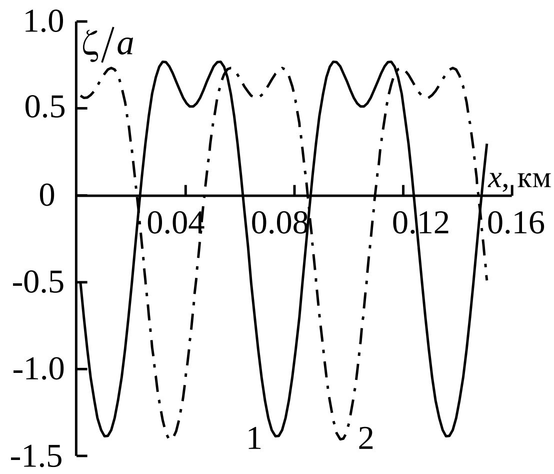

Рис. 7.2.8

Рассмотрим теперь результаты расчетов распределений высоты волновых возмущений вдоль направления их распространения, полученных при учете зависимости ζ от x и t в выражении потенциала скорости на поверхности бассейна ($P_2^0 \neq 0$, $P_3^0 \neq 0$, $L_3^0 \neq 0$). Профили $\zeta(x)$ для такого случая как функции амплитуды a и длины волны λ основной гармоники приведены на рис. 7.2.9, 7.2.11 при $a_1 > 0$ и на рис. 7.2.10, 7.2.12 при $a_1 < 0$. Они получены при $h = 2$ м, $t = 0$ для тех же значений ε, λ, a, что и соответствующие профили $\zeta(x)$ на рис. 7.2.1, 7.2.3 ($a_1 > 0$) и на рис. 7.2.2, 7.2.4 ($a_1 < 0$). Из сопоставления распределений ζ по x на рис. 7.2.1 – 7.2.4 с распределениями на рис. 7.2.9 – 7.2.12 можно заключить, что уточнение граничных условий для нелинейных приближений не вносит существенных качественных изменений в структуру возмущений. Изменение начальной фазы второй взаимодействующей гармоники приводит к таким же изменениям, как и при $P_n^0 = L_n^0 = 0$. При $a_1 > 0$ максимальные смещения поверхности бассейна достигаются в вершинах поднятий, а минимальные в подошвах впадин. Если же $a_1 < 0$, то смещения в подошвах впадин больше, чем в вершинах поднятий. Величина же вклада второй гармоники при уточненных и неуточненных граничных условиях для нелинейных приближений при одинаковых значениях исходных параметров разная. В первом случае вклад заметно проявляется при больших значениях длины волны основной гармоники, чем во втором. Это подтверждается тем, что при уточненных граничных условиях с уменьшением длины волны λ теряется волнистость впадин ($a_1 > 0$) и поднятий ($a_1 < 0$) в распределениях ζ вдоль оси x.

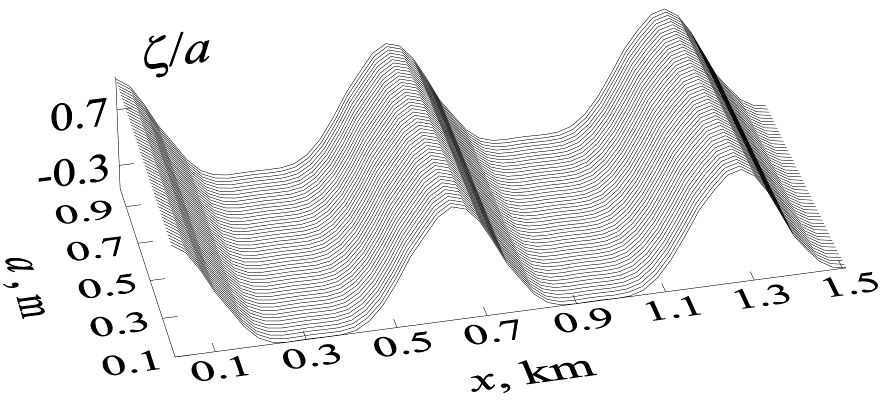

Рис. 7.2.9

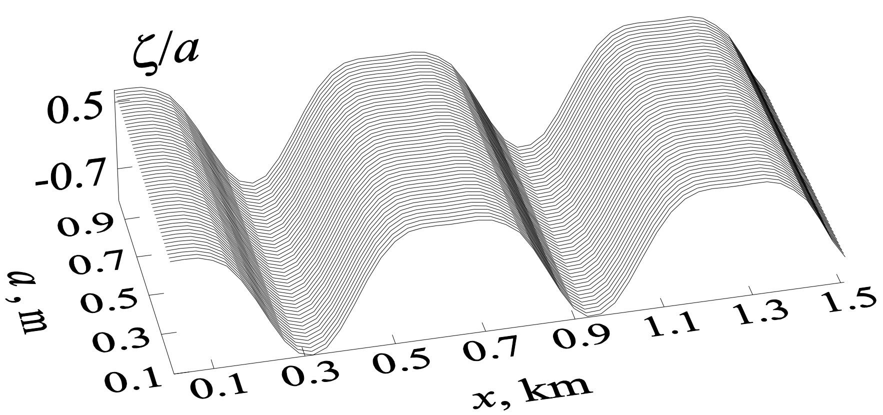

Рис. 7.2.10

Уточнение граничных условий в случае коротких волн приводит и к уменьшению величин максимальных вертикальных смещений поверхности бассейна от невозмущенного уровня, что иллюстрируют графики на рис. 7.2.13, 7.2.14. Профили $\zeta(x)$ при уточненных граничных условиях изображены на этих рисунках штриховыми, а при неуточненных – сплошными линиями в случае $h = 0$, $\lambda = 2\pi\cdot10^2$м, $\varepsilon = 2\cdot10^{-3}$ для $t = 0$ (рис. 7.2.13 *а*, 7.2.14 *а*) и при $t = 60$ сек. (рис. 7.2.13 *б*, 7.2.14 *б*). Графики на рис. 7.2.13. получены при $a_1 > 0$, а на рис. 7.2.14 при $a_1 < 0$. Сопоставление графиков из рис. 7.2.13 *а*, 7.2.14 *а* с графиками из рис. 7.2.13 *б*, 7.2.14 *б* показывает и смещение профилей ζ со временем вдоль оси x. Более наглядно фазовый сдвиг возмущений в случае уточненных граничных условий для нелинейных приближений иллюстрируют графики, приведенные на рис. 7.2.15. Они получены для тех же значений h, ε, λ, что и на рис. 7.2.13, 7.2.14 при $a_1 > 0$

(рис. 7.2.15 *а*) и при $a_1 < 0$ (рис. 7.2.15 *б*). Линии с номерами 1, 2 отвечают моментам времени $t = 0$, $t = 60$ сек.

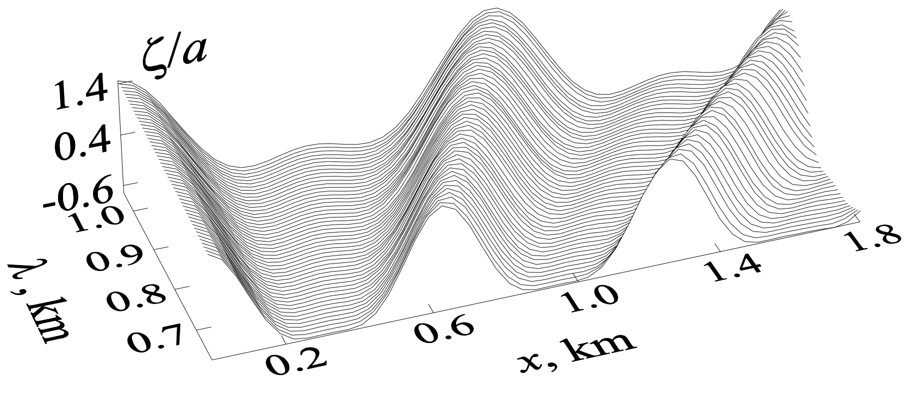

Рис. 7.2.11

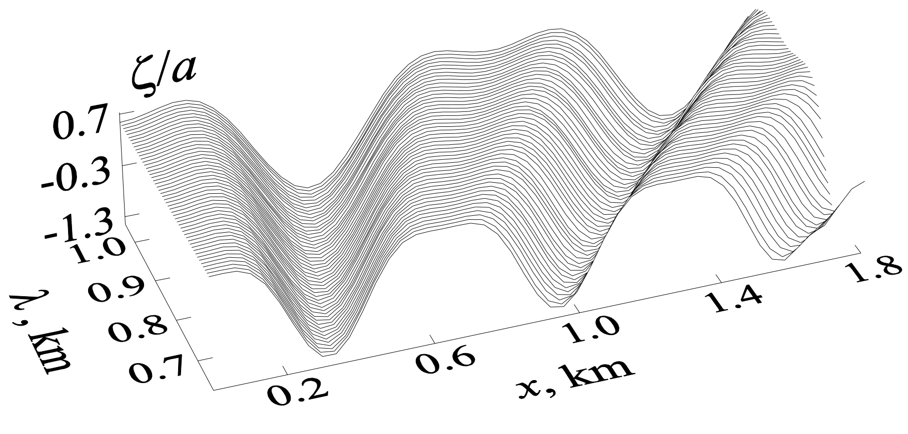

Рис. 7.2.12

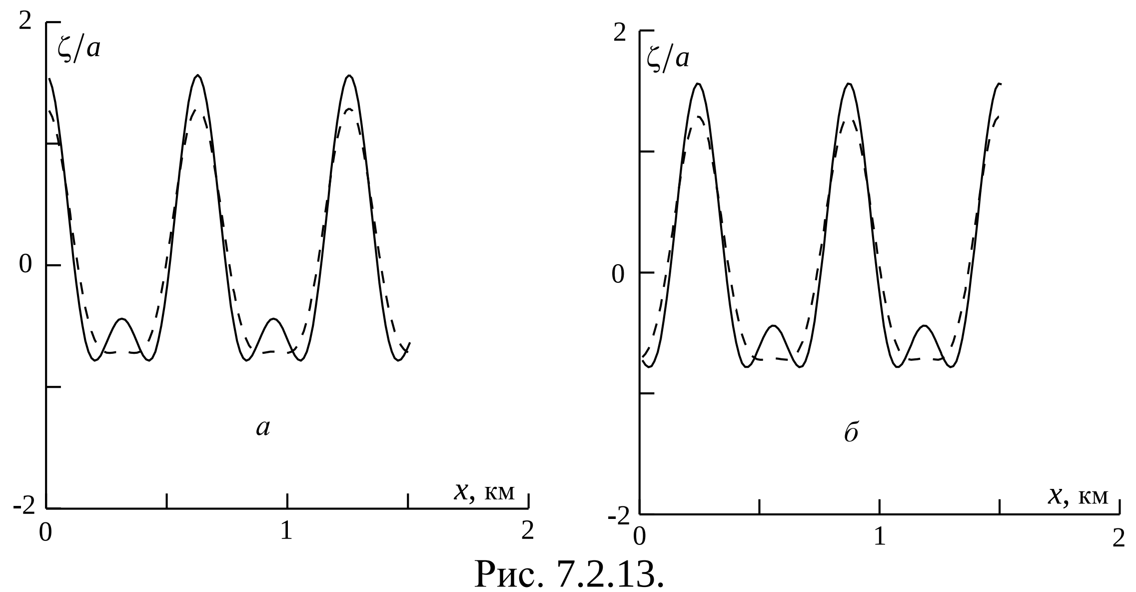

Рис. 7.2.13.

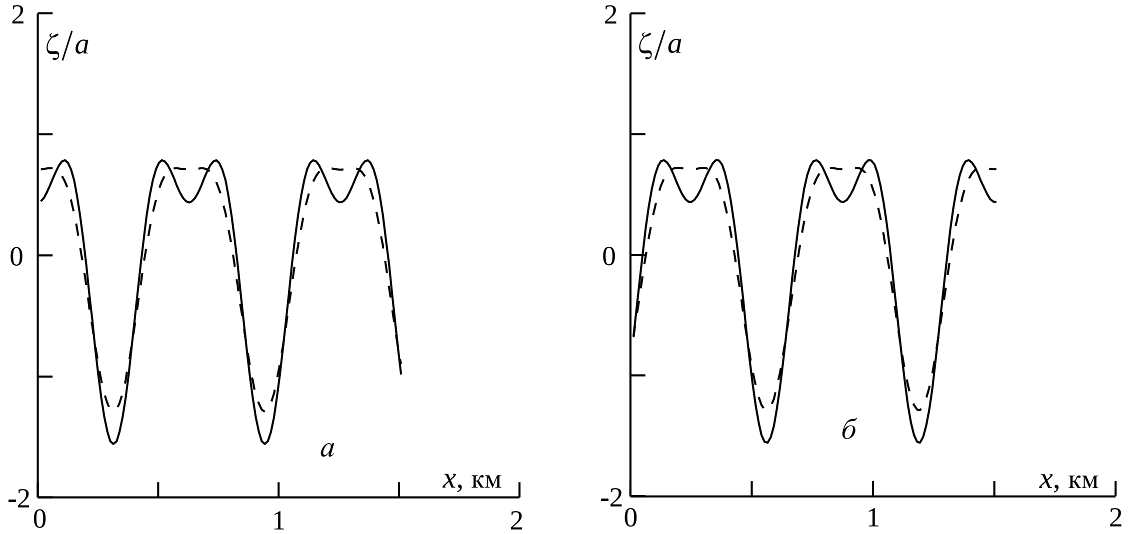

Рис. 7.2.14.

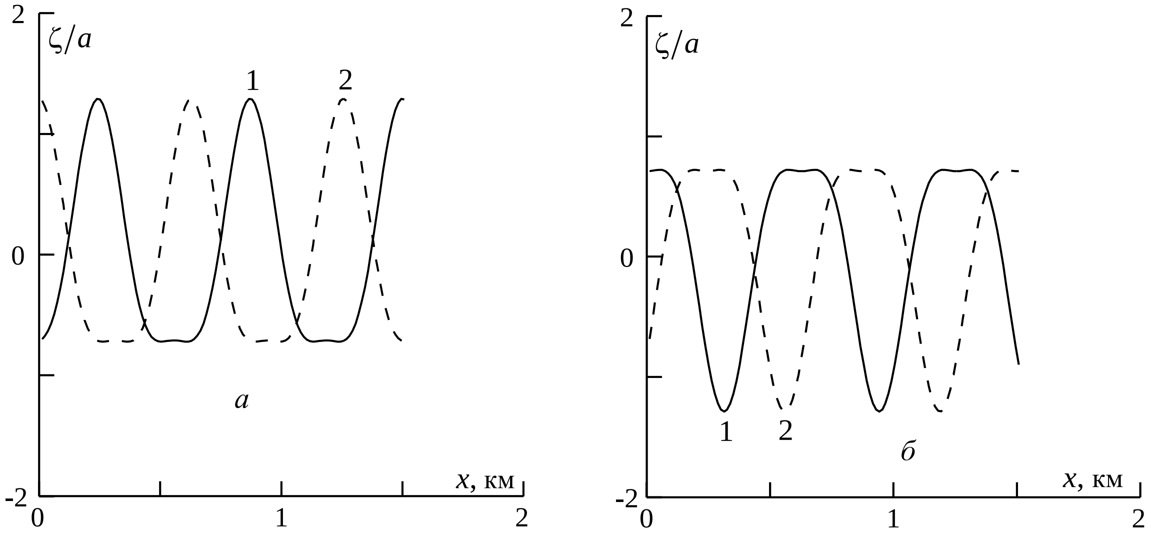

Рис. 7.2.15.

С уменьшением длины волны основной гармоники уточнение граничных условий не только сглаживает волнистость впадин и поднятий на профилях $\zeta(x)$, но и приближает вид профилей к гармоническому. Кроме того, становится заметным смещение распределений ζ по x, полученных при уточненных и неуточненных граничных условиях. Это следует из сопоставления распределений ζ по x, приведенных на рис. 7.2.16 для уточненных (штриховые линии) и неуточненных (сплошные линии) граничных условий при значениях параметров $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-2}$, $\lambda = 2\pi/3 \cdot 10^2$ м, h = 0, t = 300 сек. Графики на рис. 7.2.16 *а* соответствуют случаю $a_1 > 0$, а на рис. 7.2.16 *б* – случаю $a_1 < 0$. Отметим, что чем короче основная гармоника, тем при меньших значениях t проявляется обусловленный уточнением граничных условий фазовый сдвиг волновых возмущений. Величина горизонтального смещения распределений ζ по x определяется значениями $\sigma_0 = \tau\sqrt{kg}\sigma_1$ и $\sigma^0 = \tau\sqrt{kg}\sigma_2$ в приближениях порядка ε и ε^2 соответственно. Распределение σ_0 по волновому числу k приведено на рис. 7.2.17 при уточненных (линии с кружками) и неуточненных граничных условиях. Сплошные, штриховые и штрихпунктирные линии на этом рисунке отвечают толщинам льда 0, 3, 5 м. Квадратом отмечено значение $\sigma_0(0) = 3\sqrt{2}/8 \cdot \sqrt{g/H}$. Видно, что уточнение граничных условий существенно влияет на $\sigma_0(k)$ только в коротковолновом диапазоне. Ледяной покров уменьшает значения $\sigma_0(k)$.

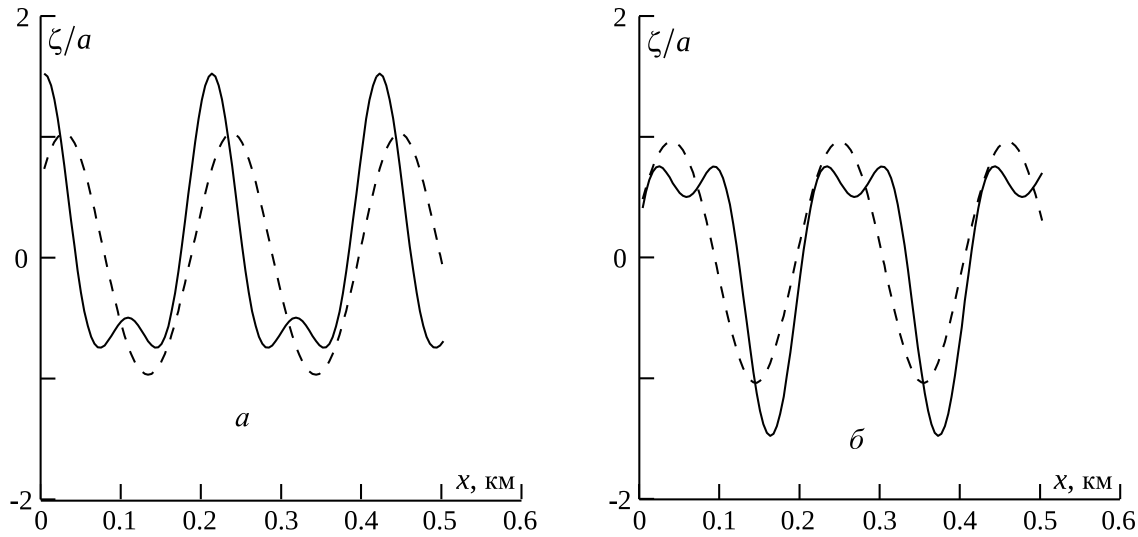

Рис. 7.2.16.

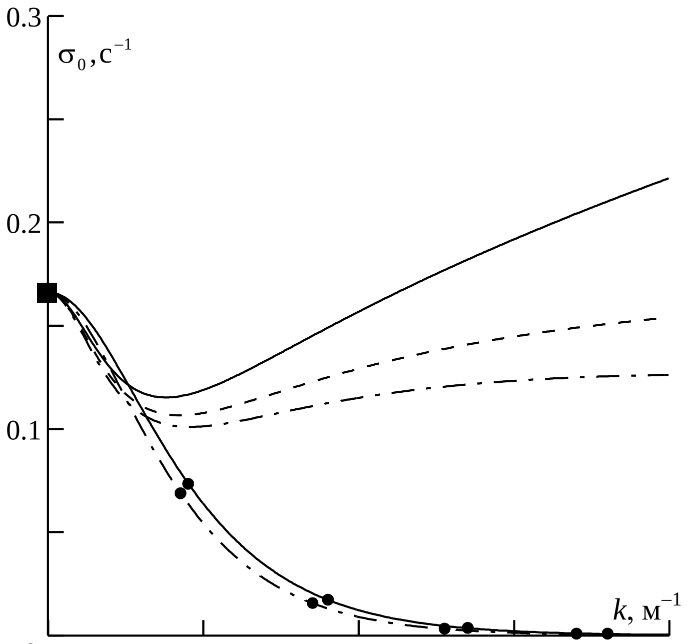

Рис.7.2.17

Распределение сдвиговых частот $\beta_1 = ak\sigma_0$ и $\beta_2 = a^2k^2\sigma^0$ по волновому числу представлены соответственно на рис. 7.2.18, 7.2.19 при a = 1 м. Сплошные и штриховые линии отвечают толщине льда 0 и 5м. Кружками отмечены зависимости $\beta_1(k)$ и $\beta_2(k)$ при уточненных граничных условиях. Из анализа графиков $\beta_1(k)$ и $\beta_2(k)$ следует, что частота сдвига в приближении порядка ε при уточненных граничных условиях ограничена сверху.

Величина максимума β_1 убывает с ростом толщины льда. Убывает она и с уменьшением амплитуды основной гармоники. При этом величина β_1 остается положительной. Величина же β_2 при уточненных граничных условиях меняет знак. При этом ледяной покров ослабляет фазовый сдвиг.

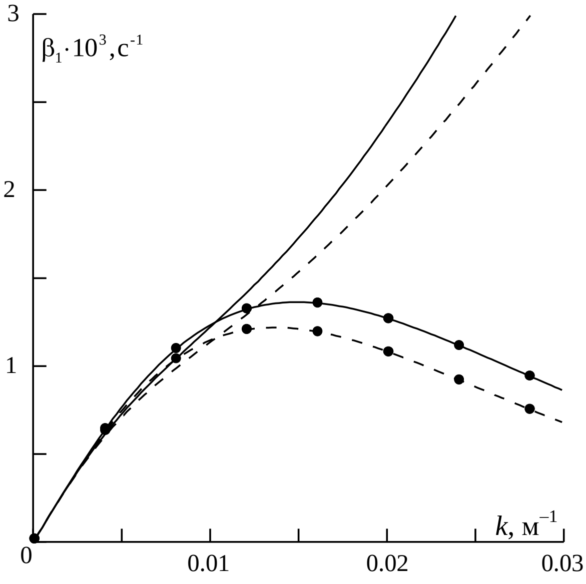

Рис.7.2.18.

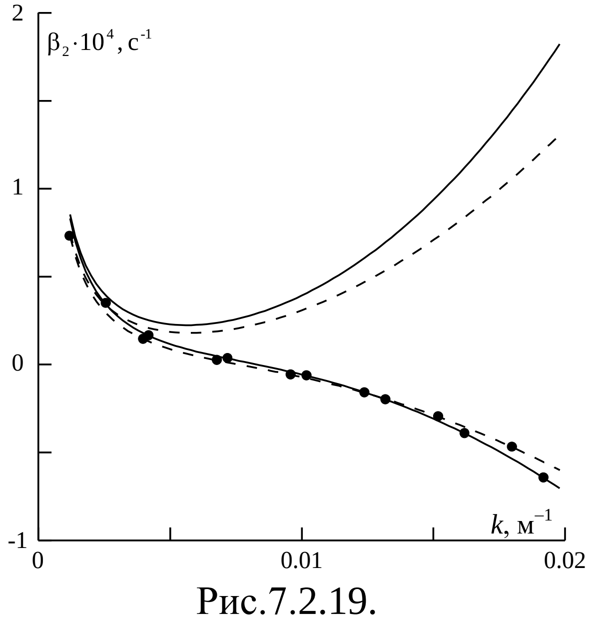

Рис.7.2.19.

Таким образом, в коротковолновом диапазоне пренебрежение кривизной волнового профиля в выражении скорости горизонтальных течений и зависимостью φ от t на поверхности бассейна при выводе граничных условий для нелинейных приближений может привести к заметным погрешностям в определении фазового сдвига возмущений и величин максимальных смещений поверхности бассейна от невозмущенного уровня при нелинейном взаимодействии волновых гармоник.

7.3. Оценка зависимости амплитуды второй взаимодействующей гармоники от толщины льда

Величина амплитуды второй взаимодействующей гармоники a_1 при уточненных граничных условиях определяется выражением (7.1.6). Из этой формулы следует, что в коротковолновом приближении (kH >> 1) амплитуда a_1 близка к нулю $\left(\lim\limits_{k\to\infty} a_1 = 0\right)$. В случае длинных волн (kH << 1)

$$a_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{3-5k^2H^2}\sqrt{\frac{1+\kappa k^2 H}{1+4\kappa k^2 H}}\ ,\ \lim_{k\to 0} a_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Если пренебречь кривизной волнового профиля при определении φ_x и φ_t, то амплитуда a_1 определяется формулой (7.1.14). Тогда для коротких волн (глубокая вода)

$$a_1 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\kappa k}{1+2\kappa k}}\ .$$

В длинноволновом приближении (мелкая вода)

$$a_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1+\kappa k^2 H}{1+4\kappa k^2 H}}\ .$$

Из полученных формул видно, что при уточненных граничных условиях величина a_1 изменяется от нуля до $1\big/\sqrt{2}$. Если же использовать неуточненные граничные условия, то эта величина находится в пределах от 1/2 до $1\big/\sqrt{2}$ при отсутствии льда. В покрытом льдом бассейне она изменяется от $1\big/2\sqrt{2}$ до $1\big/\sqrt{2}$. С ростом толщины льда значение a_1 убывает. Убывает величина a_1 и с уменьшением длины волны основной гармоники. Это иллюстрируют графики на рис. 7.3.1, где сплошными, штриховыми и штрихпунктирными линиями приведены модуль функции $a_1(k)$ для толщин льда 0, 3, 5 м соответственно. Линии с кружками получены при уточненных граничных условиях. Квадратом отмечено значение $|a_1(0)| = 1/\sqrt{2}$. Такая зависимость $a_1(k)$ объясняет зависимость приближения профиля $\zeta(x)$ к гармоническому виду с уменьшением длины волны основной гармоники в случае уточненных граничных условий. В частности, на рис. 7.2.16 профиль $\zeta(x)$, нарисованный штриховой линией, представляет собою практически сдвинутую по фазе начальную основную гармонику с амплитудой примерно 1 м.

Уточнение граничных условий вносит изменения и в распределения величины a_1 по σ_0, что иллюстрируют графики на рис. 7.3.2. Здесь, как и на рис. 7.3.1, сплошные, штриховые и штрихпунктирные линии отвечают значениям h, равным 0, 3, 5 м. Номерами 1, 2 обозначены зависимости модулей a_1 от σ_0 при уточненных и неуточненных граничных условиях для нелинейных приближений. Квадратом отмечена величина a_1 при $\sigma_0(0) = 3\sqrt{2}/8 \cdot \sqrt{g/H}$, а кружками и треугольниками значения в точках локального максимума и минимума $\sigma_0(k)$. В коротковолновом приближении точка локального максимума и его величина определяются по формулам (7.2.18), (7.2.19).

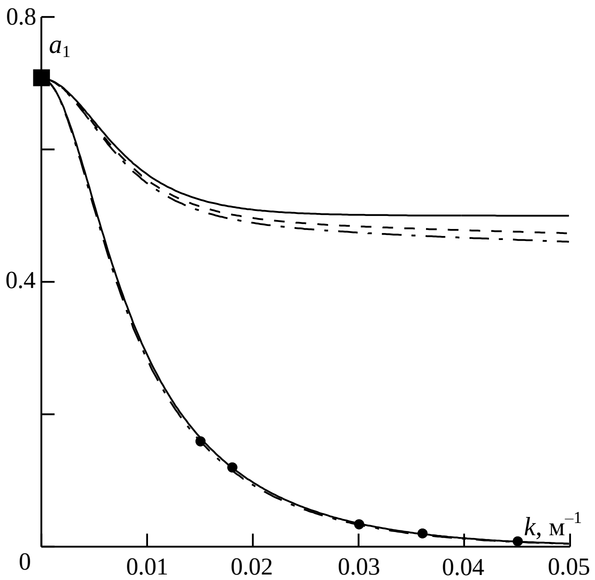

Рис. 7.3.1

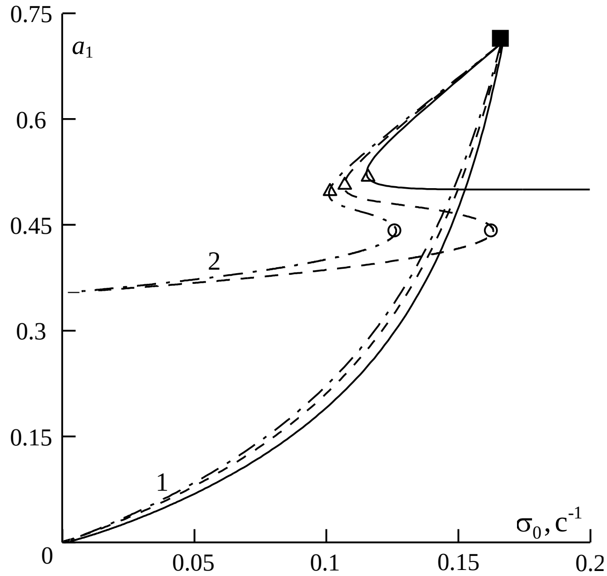

Рис.7.3.2

В результате показано, что при нелинейном взаимодействии волновых гармоник конечной амплитуды частота волновых возмущений зависит от начальной амплитуды основной гармоники не только во втором, но и в первом приближении. Влияние льда может проявляться при взаимодействии как коротких, так и длинных волн. В случае длинных волн оно выражается главным образом в фазовом сдвиге пространственного распределения волновых возмущений. Фазовый сдвиг увеличивается с увеличением времени. Он обнаруживается тем позднее, чем большая длина волны начальной основной гармоники. В случае коротких волн заметное влияние льда проявляется в уменьшении не только фазовой скорости, но и амплитуды возмущений. Причем уменьшение амплитуды ярче выражено, если начальные фазы взаимодействующих гармоник одинаковые, чем в случае, когда фазы противоположные. Изменение фазы начальной второй гармоники на противоположную деформирует профиль пространственного распределения возмущений и количественно и качественно. Направленность фазовых изменений за счет льда при этом сохраняется.

Пренебрежение кривизной волнового профиля в выражении потенциала скорости волновых возмущений при выводе граничных условий для нелинейных приближений может привести к заметным погрешностям в определении фазового сдвига коротковолновых возмущений и величин смещений поверхности бассейна от невозмущенного уровня при нелинейном взаимодействии волновых гармоник.

ГЛАВА 8. ВЛИЯНИЕ БИТОГО ЛЬДА НА НЕЛИНЕЙНЫЙ ПЕРЕНОС МАССЫ

8.1. Выражения для составляющих скорости частиц жидкости в Лагранжевых координатах

Орбитальное движение конкретной жидкой частицы можно рассчитать с помощью Лагранжевых координат $x_0(t)$, $z_0(t)$, определяющих ее положение [63, 65, 87]. Эти координаты должны удовлетворять соотношениям

$$\frac{dx_0}{dt} = u(x_0, z_0, t)\ ,\ \frac{dz_0}{dt} = w(x_0, z_0, t)\,. \tag{8.1.1}$$

Если x_0, z_0 мало (на величину порядка ε) отличаются от своих средних положений x, z, то можно записать

$$\frac{dx_0}{dt} = u(x,z,t) + (x_0 - x)\frac{\partial u}{\partial x} + (z_0 - z)\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2}(x_0 - x)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} +$$

$$+ (x_0 - x)(z_0 - z)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{1}{2}(z_0 - z)^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + O\left(\varepsilon^4\right), \tag{8.1.2}$$

$$\frac{dz_0}{dt} = w(x,z,t) + (x_0 - x)\frac{\partial w}{\partial x} + (z_0 - z)\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}(x_0 - x)^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} +$$

$$+ (x_0 - x)(z_0 - z)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \frac{1}{2}(z_0 - z)^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + O\left(\varepsilon^4\right).$$

Интегрируя (8.1.1) по времени t, определим траектории жидких частиц

$$x_0 - x = \int u\,dt\,,\quad z_0 - z = \int w dt\,. \tag{8.1.3}$$

Подставляя (8.1.3) в (8.1.2) с учетом формул

$$u\left(x,z,t\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,,\ w\left(x,z,t\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,, \tag{8.1.4}$$

получим выражения для горизонтальной и вертикальной составляющих скорости движения частиц жидкости.

8.2. Перенос массы нелинейной поверхностной волной

Стационарный перенос жидких частиц в направлении движения периодической волны, предсказанный теорией Стокса [160], рассматривался для жидкости с открытой поверхностью в [86, 87, 148] при бесконечной и в [2, 102, 113, 149] при конечной глубине бассейна. Рассмотрим теперь влияние плавающего битого льда на средние ненулевые перемещения жидких частиц в периодической нелинейной поверхностной волне. Скорости частиц жидкости при такой волне определяются полученным в разделе 6.2 потенциалом, имеющим в случае уточненных уравнений для нелинейных приближений вид

$$\varphi = \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \varepsilon^3\varphi_3 + O\left(\varepsilon^4\right), \qquad (8.2.1)$$

$$\varphi_1 = \tau\,\mathrm{ch}(z+H)\mathrm{sh}^{-1}H\sin\theta, \quad \theta = x + \tau\left(1-\varepsilon^2\sigma_0\right)t,$$

$$\varphi_2 = \tau\left(a_2 - \frac{1}{2}\mathrm{ch}H\right)\mathrm{ch}2(z+H)\,\mathrm{sh}^{-1}2H\sin 2\theta + \varphi_2^*,$$

$$\varphi_3 = \tau\left(a_3 + \frac{1}{3}l_2\right)\mathrm{ch}3(z+H)\,\mathrm{sh}^{-1}3H\sin 3\theta + \varphi_3^*,$$

$$\varphi_2^* = \frac{\tau^2}{4}\left(1+\mathrm{cth}^2 H + 2\kappa k\,\mathrm{cth}H\right)t, \;\; \sigma_0 = \frac{1}{2}\left(l_1 + \tau^2 l_3 + \kappa k\,\tau^2 l_6\right),$$

$$\varphi_3^* = \tau(l_1 - \sigma_0)\,\mathrm{ch}(z+H)\mathrm{sh}^{-1}H\sin\theta, \;\; \tau^2 = (1+\kappa k\,\mathrm{th}H)^{-1}\mathrm{th}H,$$

$$a_n = \tau^2\mu_n\left[\mathrm{th}nH - n\tau^2(1+n\kappa k\,\mathrm{th}nH)\right]^{-1}, \; n = 2,3,$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\mathrm{sh}^{-2}H - 3\kappa k\,\mathrm{cth}H\right)\mathrm{th}2H - \mathrm{cth}H,$$

$$\mu_3 = l_2 + (l_4 - \kappa k l_0)\,\mathrm{th}3H,$$

$$l_0 = a_2(4\mathrm{cth}2H + 5\mathrm{cth}H) - \frac{1}{2}(4\mathrm{cth}2H + \mathrm{cth}H)\mathrm{cth}H + \frac{1}{2},$$

$$l_1 = \frac{1}{2}l_5 - \frac{9}{8}, \; l_2 = \frac{3}{2}l_5 - \frac{1}{8},$$

$$l_3 = \frac{1}{2}\mathrm{cth}H\left(\mathrm{cth}H\,\mathrm{cth}2H - \frac{5}{4}\right) - a_2\left(\mathrm{cth}H\,\mathrm{cth}2H - \frac{1}{2}\right),$$

$$l_4 = \frac{1}{2}\mathrm{cth}H\left(\mathrm{cth}H\,\mathrm{cth}2H - \frac{5}{4}\right) - a_2\left(\mathrm{cth}H\,\mathrm{cth}2H - \frac{11}{2}\right),$$

$$l_5 = \mathrm{cth}H\mathrm{cth}2H - a_2(\mathrm{cth}H + 2\mathrm{cth}2H),$$

$$l_6 = a_2\left(\mathrm{cth}2H - \frac{5}{2}\mathrm{cth}H\right) - \frac{1}{2}\mathrm{cth}H\left(\mathrm{cth}2H - \mathrm{cth}H\right) - \frac{3}{8}.$$

Эти выражения учитывают и нелинейность вертикальных ускорений плавающих льдин. Они характеризуют потенциал скорости φ и без учета нелинейности вертикальных ускорений, если $\varphi_2^*, \sigma_0, \mu_2, \mu_3$ определить по формулам (6.3.3), (6.3.7).

Если при выводе кинематического и динамического поверхностных условий для нелинейных приближений пренебречь зависимостью ζ от x и t в выражении потенциала скорости волновых возмущений

(6.1.15), то для φ при учете нелинейности вертикальных ускорений льдин получим формулы (8.2.1) с заменой μ_2, l_0, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6 на

$$\mu_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\mathrm{sh}^{-2}H - 3\kappa k\,\mathrm{cth}H\right)\mathrm{th}2H - \mathrm{cth}H\,, \tag{8.2.2}$$

$$l_0 = a_2(4\mathrm{cth}2H + 5\mathrm{cth}H) - \frac{1}{2}\mathrm{cth}H(4\mathrm{cth}2H + \frac{3}{2}\mathrm{cth}H) + 1,$$

$$l_1 = \frac{1}{2}l_5 - \frac{3}{8}\,,\; l_2 = \frac{3}{2}l_5 - \frac{3}{8}\,,$$

$$l_3 = \frac{1}{2}\mathrm{cth}H\left(\mathrm{cth}H\,\mathrm{cth}2H - \frac{9}{4}\right) - a_2\left(\mathrm{cth}H\,\mathrm{cth}2H - \frac{3}{2}\right),$$

$$l_4 = \frac{1}{2}\mathrm{cth}H\left(\mathrm{cth}H\,\mathrm{cth}2H - \frac{11}{4}\right) - a_2\left(\mathrm{cth}H\,\mathrm{cth}2H - \frac{7}{2}\right),$$

$$l_5 = \mathrm{cth}H\,\mathrm{cth}2H - a_2(\mathrm{cth}H + 2\mathrm{cth}2H)\,,$$

$$l_6 = a_2\left(\mathrm{cth}2H - \frac{5}{2}\mathrm{cth}H\right) - \frac{1}{2}\mathrm{cth}H\left(\mathrm{cth}2H - \frac{1}{2}\mathrm{cth}H\right) - \frac{5}{8}\,.$$

Они справедливы и без учета нелинейности вертикальных ускорений, если μ_2, μ_3 определить по формулам

$$\mu_2 = \frac{1}{2}\mathrm{th}2H - \frac{1}{4}\frac{\mathrm{th}2H}{\mathrm{sh}^2H} - \mathrm{ch}H\,, \quad \mu_3 = l_2 + l_4\mathrm{th}3H\,,$$

а φ_2^*, σ_0 по формулам (6.3.3).

Подстановкой соответствующего потенциала φ в (8.1.2) с учетом (8.1.3), (8.1.4) можно показать, что вертикальное смещение частиц жидкости до величин третьего порядка малости является периодическим, происходящим со скоростью

$$w = \varepsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \varepsilon^2\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} + \varepsilon^3\frac{\partial\varphi_3}{\partial z} + O\left(\varepsilon^4\right). \tag{8.2.3}$$

Выражение для скорости горизонтального смещения частиц жидкости, кроме периодической составляющей, содержит Стоксову стационарную скорость поступательного перемещения.

$$u_0 = -\varepsilon^2 A\left[1 + \varepsilon^2(2l_1 - \sigma_0 + A_1 - A_2)\right], \tag{8.2.4}$$

$$A = \frac{g\tau\,\mathrm{ch}2(z+H)}{2\sqrt{kg}\,\mathrm{sh}^2H},\; A_1 = \frac{a_4^2\,\mathrm{ch}4(z+H)}{\mathrm{ch}2(z+H)\,\mathrm{ch}^2H},\; A_2 = \frac{a_4a_5}{2\mathrm{sh}2H}\,,$$

$$a_4 = a_2 - \frac{1}{2}\mathrm{ch}H\,,\; a_5 = 3\mathrm{ch}2(z+H) + 4\mathrm{th}2(z+H)\mathrm{sh}2(z+H) + 2\mathrm{sh}^2(z+H).$$

Эта скорость, как и при отсутствии льда [2, 86, 102, 160], затухает с глубиной, принимая у дна ($z = -H$) значение

$$u_0 = -\varepsilon^2 \frac{g\tau}{2\sqrt{kg}} \mathrm{sh}^{-2} H \left[1 + \varepsilon^2 (2l_1 - \sigma_0 + a_4^2 \mathrm{ch}^{-2} H - \frac{3}{2} a_4 \mathrm{sh}^{-1} 2H) \right].$$

При $z = 0$ величина u_0 характеризует скорость дрейфа льда под воздействием нелинейной поверхностной волны. Интегрируя (8.2.4) по вертикальной координате z, получим величину полного среднего переноса жидкости

$$Q = \varepsilon^2 \frac{g\tau}{2k\sqrt{kg}} \mathrm{cth} H \left\{ 1 + \varepsilon^2 \left[2l_1 - \sigma_0 + 2a_4^2 \mathrm{cth} 2H \, \mathrm{th} H - 1/4 \, a_4 \left(3\mathrm{ch} H + 5\mathrm{th} H \right) \right] \right\} \quad (8.2.5)$$

в направлении бега волны.

Для количественной оценки величин скорости поступательного перемещения жидких частиц на поверхности бассейна (скорости Стоксова дрейфа льда) и полного среднего переноса жидкости, а также их зависимости от толщины льда и крутизны волны линейного приближения проводились численные расчеты в случае уточненных ($F_2^0 \neq 0$, $F_3^0 \neq 0$, $L_3^0 \neq 0$) и неуточненных ($F_2^0 = F_3^0 = L_3^0 = 0$) граничных условий для нелинейных приближений при значениях (6.3.6). Длина волны λ начальной гармоники при этом изменялась в пределах $0.2\pi H \leq \lambda \leq 20\pi H$. Минимальное значение $\lambda = 0.2\pi H$ выбрано с учетом того, что в жидкости с плавающим битым льдом волны с частотой, превышающей частоту плавучести льдин, распространяться не могут. Некоторые из результатов расчетов изображены графически на рис. 8.2.1 при $H = 10^2$ м и на рис. 8.2.2 при $H = 10^3$ м. Графики распределений величины скорости Стоксова дрейфа $U = -u_0$ на поверхности бассейна (рис. 8.2.1 *а*, рис. 8.2.2 *а*) и полного среднего переноса массы Q (рис. 8.2.1 *б*, рис. 8.2.2 *б*) по $d = kH$ приведены здесь для открытой воды (сплошные линии) и покрытой битым льдом толщиной 5 м (штриховые линии). Номерам 1 и 2 отвечают значения амплитуды волны линейного приближения 1 м и 2 м. Графики с кружками и без кружков получены соответственно при уточненных ($F_2^0 \neq 0$, $F_3^0 \neq 0$, $L_3^0 \neq 0$) и неуточненных ($F_2^0 = F_3^0 = L_3^0 = 0$) граничных условиях для нелинейных приближений.

Из анализа результатов следует, что рост толщины льда уменьшает скорость поступательного перемещения жидких частиц, а следовательно, и величину полного среднего переноса жидкости. Усиление нелинейности волны, наоборот, приводит к росту величин u_0 и Q. Чем толще лед, тем меньшая скорость его Стоксова дрейфа.

Отметим, что пренебрежение нелинейностью вертикального ускорения льда в граничном условии (6.1.2) приводит к увеличению скорости Стоксова дрейфа и полного среднего переноса массы [23]. Однако эти отличия, усиливающиеся с ростом крутизны волны начальной гармоники, при толщине льда 5 м не превышают 1.2% и 6.2% для амплитуды волны линейного приближения 1 м и 2 м в пределах рассмотренного диапазона изменения ее длины.

Уточнение граничных условий для нелинейных приближений приводит к незначительному росту величин скорости поступательного перемещения частиц жидкости и полного среднего переноса массы. Причем это влияние убывает с увеличением длины и уменьшением амплитуды волны начальной линейной гармоники.

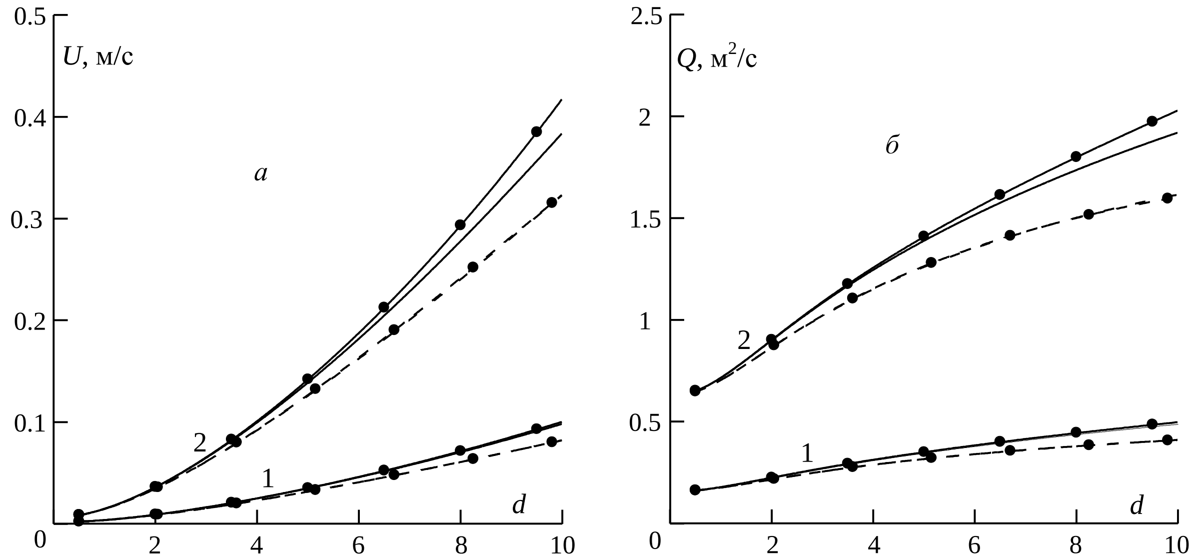

Рис. 8.2.1.

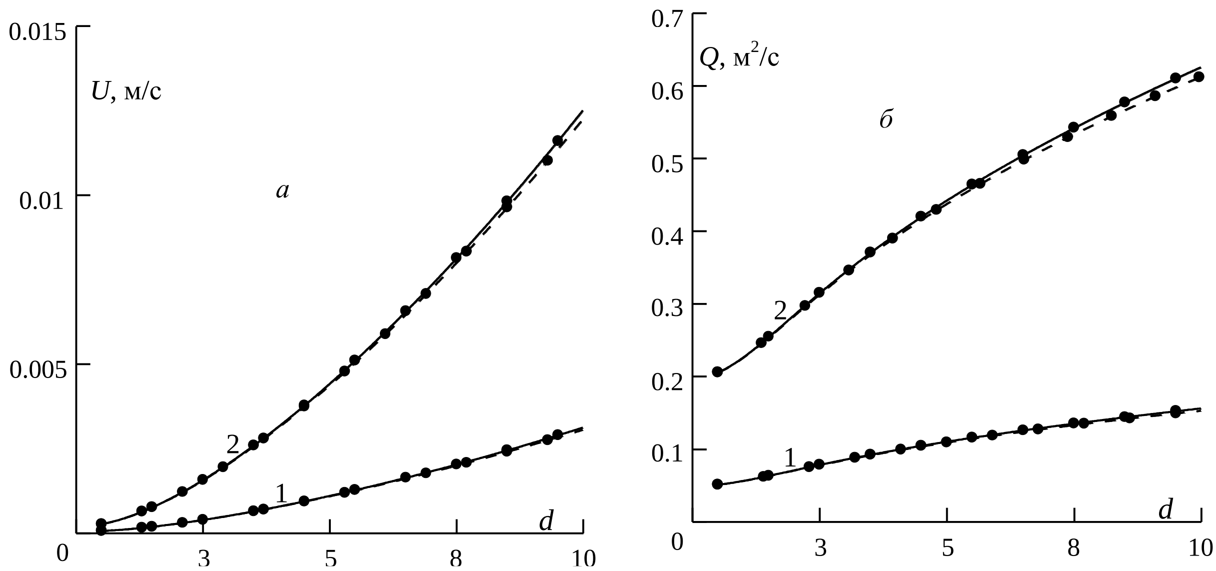

Рис. 8.2.2

8.3. Перенос массы при нелинейном взаимодействии поверхностных волн

Рассмотрим влияние плавающего битого льда на перенос массы волновым движением, формируемом при нелинейном взаимодействии поверхностных периодических бегущих волн первой и второй гармоник в жидкости конечной глубины. Скорости частиц жидкости в этом случае определяются полученным в разделе 7.1 потенциалом

$$\varphi = \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \varepsilon^3\varphi_3 + O(\varepsilon^4), \qquad (8.3.1)$$

$$\varphi_1 = \tau\left[\mathrm{ch}(z+H)\mathrm{sh}^{-1}H\sin\theta + a_1\mathrm{ch}2(z+H)\mathrm{sh}^{-1}2H\sin 2\theta\right],$$

$$\varphi_i = \tau\sum_{n=1}^{2i} b_{in}\mathrm{ch}n(z+H)\,\mathrm{sh}^{-1}nH\sin n\theta + \tau^2 b_{i0}t\,,\ i=2,3.$$

Здесь при уточненных граничных условиях для нелинейных приближений

$$\tau^2 = \tau_0^{-1}\mathrm{th}H\,,\ \tau_0 = 1+\kappa k\,\mathrm{th}H,\ \theta = x+\tau(1+\varepsilon\sigma_1+\varepsilon^2\sigma_2),$$

$$\sigma_{1,2} = \tau_{1,2}/\tau,\ \tau_1 = \frac{3}{2}a_1\tau\tau_0^{-1}\mathrm{cth}2H\,, \qquad (8.3.2)$$

$$\tau_2 = \omega_2 - \omega_1 a_2\,,\ \omega_1 = -\tau_1/a_1\,,\ \omega_2 = \frac{1}{2}(\gamma_1 - q_1\mathrm{th}H)\,\tau/\tau_0\,,$$

$$b_{20} = \frac{1}{4}\left[1+\mathrm{cth}^2H + 4a_1^2(1+\mathrm{cth}^2 2H)\right],\ b_{21} = -\frac{1}{2}a_1(2\mathrm{cth}2H + \mathrm{cth}H) + \sigma_1,$$

$$b_{22} = a_2 + a_0,\ b_{23} = a_{23} - \frac{1}{2}(2\mathrm{cth}2H + \mathrm{cth}H)a_1,\ b_{24} = a_{24} - a_1^2\mathrm{cth}2H\,,$$

$$b_{30} = 1/2\left[\sigma_1(1+4a_1^2) - b_{21}\mathrm{cth}^2H\right] - 2a_1\left[b_{22}\mathrm{cth}^2 2H + \right.$$
$$\left. + 1/8(\,5\mathrm{cth}H + 2\mathrm{cth}2H - a_2\,)\,\right] + b_{30}^0,$$

$$b_{30}^0 = -\frac{1}{2}\left\{\sigma_1\left(1+4a_1^2\right) + b_{21} + a_1\left[4b_{22} + 4a_2 + \frac{1}{4}(\,3\mathrm{cth}H - 2\mathrm{cth}2H)\right]\right\},$$

$$b_{3n} = (na_{3n} + \gamma_n)/n, n=1,2...6\,;\ a_0 = a_1\sigma_1 - \frac{1}{2}\mathrm{cth}H\,,$$

$$a_1 = \pm\frac{1}{2}\left[\frac{\tau_0}{\tau_*}\left(\frac{2}{3}\mathrm{cth}H\,\mathrm{th}2H + \frac{1}{6}\left(\mathrm{cth}^2H - 5\right)\mathrm{th}^2 2H\right)\right]^{1/2},$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(\omega_2 - \delta)/\omega_1\,,\ a_{2n} = -a_1\tau^2F_n\mu_n^{-1}, n=3,4,$$

$$a_{31} = -\sigma_2 + a_2\mathrm{cth}H\,\mathrm{cth}2H\,,\ a_{32} = a_3 + (a_1\sigma_2 + a_2\sigma_1),$$

$$a_{3n} = \tau^2(q_n\mathrm{th}nH - \gamma_n)\mu_n^{-1}, n=3,4,5,6,$$

$$\tau_* = 1+2\kappa k\,\mathrm{th}2H,\ \delta = \tau(\gamma_2 - q_2\mathrm{th}2H)/(4a_1\tau_*),$$

$$F_3 = \frac{1}{2}\left[3\left(2\,\mathrm{cth}\,2H + \mathrm{cth}\,H\right) + \left(2\,\mathrm{cth}\,H\,\mathrm{cth}\,2H - 11\right)\mathrm{th}\,3H\right],$$

$$F_4 = \left[4\,\mathrm{cth}\,2H + \left(\mathrm{cth}^2 2H - 5\right)\mathrm{th}\,4H\right]a_1,\ \mu_n = \left(1 - n^2 \kappa k \tau^2\right)\mathrm{th}\,nH - n\tau^2,$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}a_1\left(b_{21}\mathrm{cth}\,H + 3b_{23}\mathrm{cth}\,3H\right) + \left(a_0 + a_1 a_{23}\right)\mathrm{cth}\,2H - \frac{15}{4}a_1^2 - \frac{3}{8},$$

$$\gamma_2 = \left(b_{21} + a_{23}\right)\mathrm{cth}\,H + a_1\left(2a_{24}\mathrm{cth}\,2H + 4b_{24}\mathrm{cth}\,4H\right) + 3\left(b_{23}\mathrm{cth}\,3H - a_1^3\right),$$

$$\gamma_3 = \gamma_{31} + \gamma_{32},\ \gamma_{31} = \frac{3}{8}a_1^2 - 3a_{23}\sigma_1 + \frac{1}{8},$$

$$\gamma_{32} = \frac{3}{2}\left(b_{21}a_1 + a_2 + a_{24}\right)\mathrm{cth}\,H + 3\left(a_0 + a_2\right)\mathrm{cth}\,2H + 6b_{24}\mathrm{cth}\,4H,$$

$$\gamma_4 = 2a_{23}\mathrm{cth}\,H + a_1\left[4\left(2a_2 + a_0\right)\mathrm{cth}\,2H + \frac{9}{2}\right] + 6b_{23}\mathrm{cth}\,3H - 4a_{24}\sigma_1,$$

$$\gamma_5 = \frac{5}{2}a_{24}\mathrm{cth}\,H + a_1\left(5a_{23}\mathrm{cth}\,2H + \frac{15}{2}b_{23}\mathrm{cth}\,3H\right) + 10b_{24}\mathrm{cth}\,4H + \frac{69}{8}a_1^2,$$

$$\gamma_6 = a_1\left(6a_{24}\mathrm{cth}\,2H + 12b_{24}\mathrm{cth}\,4H\right) + 5a_1^2,$$

$$q_i = \sum_{n=1}^{4} q_{in},\ i = 1, 2, 3,\ q_j = \sum_{n=1}^{3} q_{jn},\ j = 4, 5,$$

$$q_6 = a_1\left[4b_{24}\left(3 - \mathrm{cth}\,2H\,\mathrm{cth}\,4H\right) + a_1^2\mathrm{cth}\,2H + 2a_{24}\right] + q_{61},$$

$$q_{61} = 4a_1\left(b_{24} + a_{24}\right),$$

$$q_{11} = a_1\left(\frac{5}{2}\sigma_1 - \frac{1}{2}b_{21} + 2a_{23}\right) + a_0 + \kappa k \sigma_1^2,$$

$$q_{12} = \left(\sigma_1 b_{21} - \frac{7}{4}a_1^2 - \frac{5}{8}\right)\mathrm{cth}\,H - 5a_1^2\mathrm{cth}\,2H,$$

$$q_{13} = a_1 b_{23}\left(\frac{3}{2} - 3\,\mathrm{cth}\,2H\,\mathrm{cth}\,3H\right) - \left(a_0 + a_1 b_{21}\right)\mathrm{cth}\,H\,\mathrm{cth}\,2H,$$

$$q_{14} = -\left\{a_0 + a_1\left[b_{21} + 2\sigma_1 - 3\left(b_{23} + a_{23}\right)\right] + 2a_1^2\left(\mathrm{cth}\,H - 2\,\mathrm{cth}\,2H\right) + 1/2\,\mathrm{cth}\,H\right\}$$

$$q_{21} = \left(2a_0\sigma_1 - 5a_1^3 + a_1\right)\mathrm{cth}\,2H - \frac{5}{2}a_1\mathrm{cth}\,H,$$

$$q_{22} = 4a_1 b_{24}\left(1 - \mathrm{cth}\,2H\,\mathrm{cth}\,4H\right) + b_{21}\left(1 - \frac{1}{2}\mathrm{cth}^2 H\right) + \frac{3}{2}b_{23}\left(2 - \mathrm{cth}\,H\,\mathrm{cth}\,3H\right),$$

$$q_{23} = 2a_1\left(a_{24} + 2\kappa k \sigma_1^2\right) + \frac{1}{2}\left(a_{23} + \sigma_1\right),$$

$$q_{24} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + b_{21}) - a_1[4(a_{24} + b_{24}) + \mathrm{cth}H - \mathrm{cth}2H] - \frac{3}{2}(a_{23} + b_{23}),$$

$$q_{31} = a_2\left(\frac{7}{2} - \mathrm{cth}H\,\mathrm{cth}2H\right) + 3(b_{23}\mathrm{cth}3H + 6\kappa k a_{24})\sigma_1,$$

$$q_{32} = a_1\left[b_{21}\left(\frac{3}{2} - \mathrm{cth}H\,\mathrm{cth}2H\right) + \frac{5}{2}\sigma_1\right] - a_1^2\left(\frac{11}{8}\mathrm{cth}H - \frac{1}{2}\mathrm{cth}2H\right),$$

$$q_{33} = 2b_{24}(3 - \mathrm{cth}H\,\mathrm{cth}4H) + a_0(3 + \mathrm{cth}H\,\mathrm{cth}2H) + \frac{1}{8}\mathrm{cth}H + \frac{1}{2}a_{24},$$

$$q_{34} = a_0 + 2a_2 + a_1(b_{21} + 2\sigma_1) - 2(b_{24} + a_{24}) + a_1^2\left(3\mathrm{cth}2H - \frac{1}{2}\mathrm{cth}H\right),$$

$$q_{41} = 2\sigma_1\left[2(b_{24}\mathrm{cth}4H + 8\kappa k a_{24}) + a_1^2\right] + \frac{3}{2}b_{23}(4 - \mathrm{cth}H\,\mathrm{cth}3H),$$

$$q_{42} = 2a_1\left[a_2(3 - \mathrm{cth}^2 H) + a_0(2 - \mathrm{cth}^2 2H) + \frac{3}{4}\mathrm{cth}2H - \frac{1}{8}\mathrm{cth}H\right] + \frac{1}{2}a_{23},$$

$$q_{43} = 2a_1^2\sigma_1 + \frac{3}{2}(a_{23} + b_{23}) + a_1\left(4a_2 + 2a_0 + \frac{3}{4}\mathrm{cth}H - \frac{1}{2}\mathrm{cth}2H\right),$$

$$q_{51} = 2b_{24}(5 - \mathrm{cth}H\,\mathrm{cth}4H) + \frac{1}{2}a_{24} - a_1^2\left(\frac{3}{8}\mathrm{cth}H - \frac{5}{2}\mathrm{cth}2H\right),$$

$$q_{52} = 2a_1\left[a_{23} + \frac{3}{4}b_{23}(5 - 2\mathrm{cth}2H\,\mathrm{cth}3H)\right],$$

$$q_{53} = 2b_{24} + 3a_1(a_{23} + b_{23}) + a_1^2\left(\mathrm{cth}2H - \frac{1}{2}\mathrm{cth}H\right) + 2a_{24},$$

а величина a_3 в a_{32} может быть определена из уравнений четвертого приближения. Формулы (8.3.1), (8.3.11) определяют потенциал скорости и без учета кривизны волнового профиля в выражениях для скорости горизонтальных поверхностных течений φ_x и производной φ_t. Однако в таком случае ($F_2^0 = F_3^0 = L_3^0 = 0$) следует учесть, что $q_{14} = q_{24} = q_{34} = q_{43} = q_{53} = q_{61} = b^0_{30} = 0$, а величины a_1, τ_1, F_3, F_4, γ_i (i = 1, 2, 4, 5, 6), γ_{31}, q_j (j = 1, 2, 3, 4, 5) имеют вид (7.1.14).

Подставляя полученное выражение для потенциала скорости φ в (8.1.2) с учетом (8.1.3) (8.1.4), можно показать, что вертикальные смещения частиц жидкости в волновом движении, формируемом при нелинейном взаимодействии волновых гармоник, как и при распространении волны конечной амплитуды (разделы 6.2, 6.3, 8.2) являются периодическими. Они происходят со скоростью, определяемой формулой (8.2.3). Скорость горизонтального смещения частиц жидкости, кроме периодической составляющей, содержит Стоксову стационарную скорость поступательного перемещения, имеющую в рассматриваемом случае вид

$$u_0 = -\varepsilon^2 \frac{g\tau}{\sqrt{kg}} A_1\left(1 - \varepsilon A_0 - \varepsilon^2 A\right) + O\left(\varepsilon^5\right), \tag{8.3.3}$$

$$A_0 = \sigma_1 - (A_2 - C)A_1^{-1},\ A = \sigma_2 + \left[F - D + \sigma_1(A_2 - 2C)\right]A_1^{-1},$$

$$A_i = \sum_{n=1}^{2} A_{in}\,\mathrm{sh}^{-2} nH\,\mathrm{ch}2n(z+H),\ i = 1,2;\ A_{11} = \frac{1}{2},\ A_{12} = 2a_1^2,\ A_{21} = b_{21},$$

$$A_{22} = 4a_1 b_{22},\ C = a_1 F_1 C_1,\ D = \sum_{n=1}^{4} D_n\,\mathrm{sh}^{-2} nH\,\mathrm{ch}2n(z+H),$$

$$F = F_1 C_1(b_{22} + 2b_{21}a_1) + 8b_{24}a_1^2 F_2 C_2 + \frac{1}{2}a_1 b_{23} F_0 \prod_{n=1}^{3}\mathrm{sh}^{-1} nH,$$

$$C_j = 4\,\mathrm{ch}4j(z+H) - \mathrm{ch}2j(z+H),$$

$$F_j = \frac{1}{4}\mathrm{sh}^{-2} jH\,\mathrm{sh}^{-1} 2jH,\ j = 1,2,$$

$$F_0 = \frac{27}{2}\mathrm{ch}6(z+H) - 4\,\mathrm{ch}4(z+H) - \frac{1}{2}\mathrm{ch}2(z+H),$$

$$D_1 = b_{31} + \frac{1}{2}b_{21}^2,\ D_2 = 4a_1 b_{32} + 2b_{22}^2,\ D_3 = \frac{9}{2}b_{23}^2,\ D_4 = 8b_{24}^2.$$

При $z = 0$, $\kappa \neq 0$ величина u_0 характеризует скорость Стоксова дрейфа льда при нелинейном взаимодействии периодических бегущих волн первой и второй гармоник. Интегрируя (8.3.3) по вертикальной координате z, получим величину полного среднего переноса массы в направлении движения волновых гармоник

$$Q = \varepsilon^2 \frac{g\tau}{k\sqrt{kg}}\left(Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2\right),\ Q_0 = \frac{1}{2}\mathrm{cth}H + a_1^2\,\mathrm{cth}2H, \tag{8.3.4}$$

$$Q_1 = \sum_{n=1}^{2} B_{1n}\,\mathrm{cth}nH - \frac{1}{2}a_1\left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4}\mathrm{cth}^2 H\right),\ Q_2 = Q_{21} - Q_{22},$$

$$Q_{21} = \sum_{n=1}^{2}\left[B_{2n}\left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4}\mathrm{cth}^2 nH\right) - B_{3n}\,\mathrm{cth}nH\right] + \sum_{n=1}^{4}\frac{1}{n}D_n\,\mathrm{cth}nH,$$

$$Q_{22} = \frac{1}{8}a_1 b_{23}(9\,\mathrm{sh}6H - 4\,\mathrm{sh}4H - \mathrm{sh}2H)\prod_{n=1}^{3}\mathrm{sh}^{-1} nH,$$

$$B_{11} = b_{21} - \frac{1}{2}\sigma_1,\ B_{12} = a_1(2b_{22} - \sigma_1 a_1),\ B_{21} = a_1(\sigma_1 - b_{21}) - \frac{1}{2}b_{22},$$

$$B_{22} = -2a_1^2 b_{24},\ B_{31} = \sigma_1 b_{21} + \frac{1}{2}\sigma_2,\ B_{32} = a_1(2\sigma_1 b_{22} + a_1\sigma_2).$$

Из анализа формул (8.3.2), (8.3.3), (8.3.4) следует, что основные приближения для скорости поступательного перемещения частиц жидкости и полного переноса массы являются величинами второго порядка малости. Они не зависят от знака амплитуды a_1 второй взаимодействующей гармоники и убывают с ростом толщины льда. При одинаковых условиях эти величины превышают соответствующие значения для случая бегущей нелинейной поверхностной волны ($a_1 = 0$). Кроме того, свой вклад в u_0 и Q при $a_1 \neq 0$ вносят величины третьего и четвертого порядков малости. Если $a_1 = 0$, то величины третьего порядка в u_0 и Q отсутствуют (см. (8.2.4), (8.2.5)).

Количественный анализ зависимости нелинейного переноса массы от толщины льда и характеристик взаимодействующих гармоник проводился при значениях (6.3.6). Длина волны основной гармоники изменялась в пределах $0.2\pi H \leq \lambda \leq 20\pi H$. Отметим, что слагаемое четвертого порядка малости в (8.3.3) для скорости поступательного перемещения частиц жидкости зависит от величины a_3, входящей в виде одного из трех слагаемых одинакового порядка малости в выражение для a_{32}. Так как величина a_3 может быть определена только из уравнений четвертого приближения для потенциала скорости, то при численных расчетах она полагалась равной нулю. Однако для ориентировочной оценки допускаемой при этом погрешности в определении скорости Стоксова дрейфа расчеты проводились как при $a_{32} = 0$, так и при $a_{32} \neq 0$. Сопоставление полученных результатов показало, что обусловленная пренебрежением величины a_{32} погрешность составляет менее одного процента.

Некоторые результаты вычислений $U = -u_0(z)$ при $z = 0$ и Q как функций $d = kH$ изображены графически. Графики, отмеченные кружками, получены при уточненных граничных условиях для нелинейных приближений. Сплошными линиями даны зависимости при отсутствии льда ($h = 0$), а штриховыми – при $h = 5$м. Номерами 1, 2 на рис. 8.3.1, 8.3.2 обозначены графики, отвечающие значениям амплитуды a начальной основной гармоники 0.5 м и 1 м. При $a = 1$ м графики функций $U(d)$ и $Q(d)$, отвечающие нелинейному взаимодействию волн первой и второй гармоник ($a_1 \neq 0$), изображены (линии 2) на рис. 8.3.3, 8.3.4 вместе с графиками (линии 1) для случая периодической бегущей нелинейной волны ($a_1 = 0$).

Из анализа результатов следует, что величина скорости поступательного перемещения жидких частиц и полный средний перенос массы в направлении движения взаимодействующих гармоник в ледовых условиях меньше, чем при отсутствии льда. Эти отличия, усиливающиеся с ростом толщины льда и амплитуд гармоник, убывают с увеличением длины (с уменьшением крутизны) волны основной гармоники. Участие второй взаимодействующей гармоники в формировании волновых возмущений увеличивает скорость переноса и полный средний перенос массы. Однако изменения U и Q, обусловленные второй гармоникой, убывают с ростом толщины льда. Уточнение граничных условий для нелинейных приближений существенно уменьшает различия величин U и Q, полученных при распространении волны конечной амплитуды и при нелинейном взаимодействии волновых гармоник [23, 24]. Это видно из сопоставления соответствующих графиков на рис. 8.3.3 и рис. 8.3.4. При уточненных уравнениях значение a_1 убывает с уменьшением длины волны основной гармоники, следовательно, убывает и вклад второй гармоники в нелинейный перенос массы.

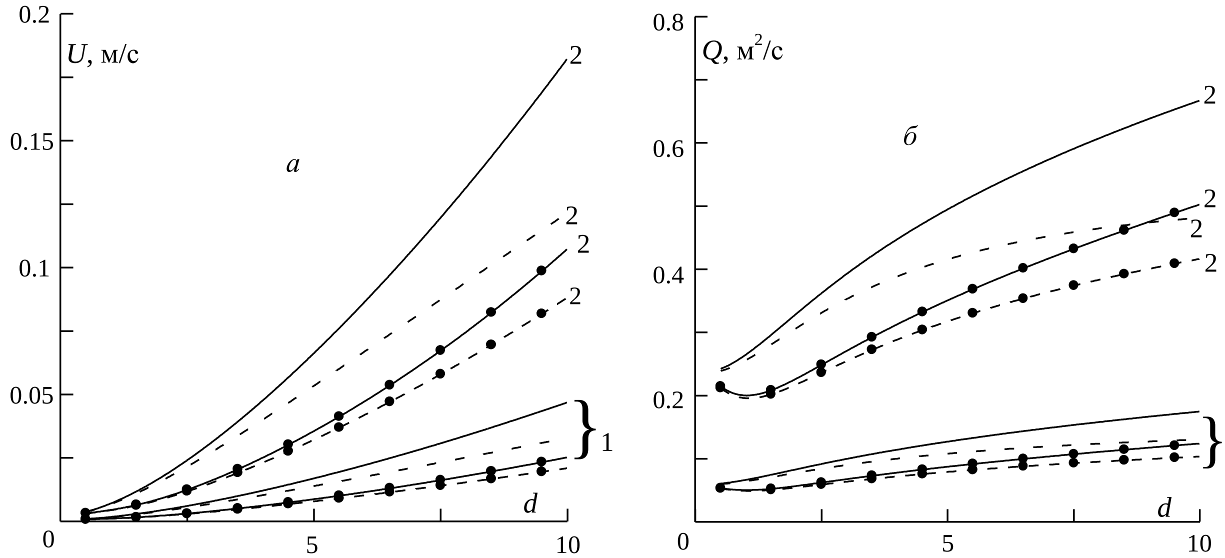

Рис. 8.3.1

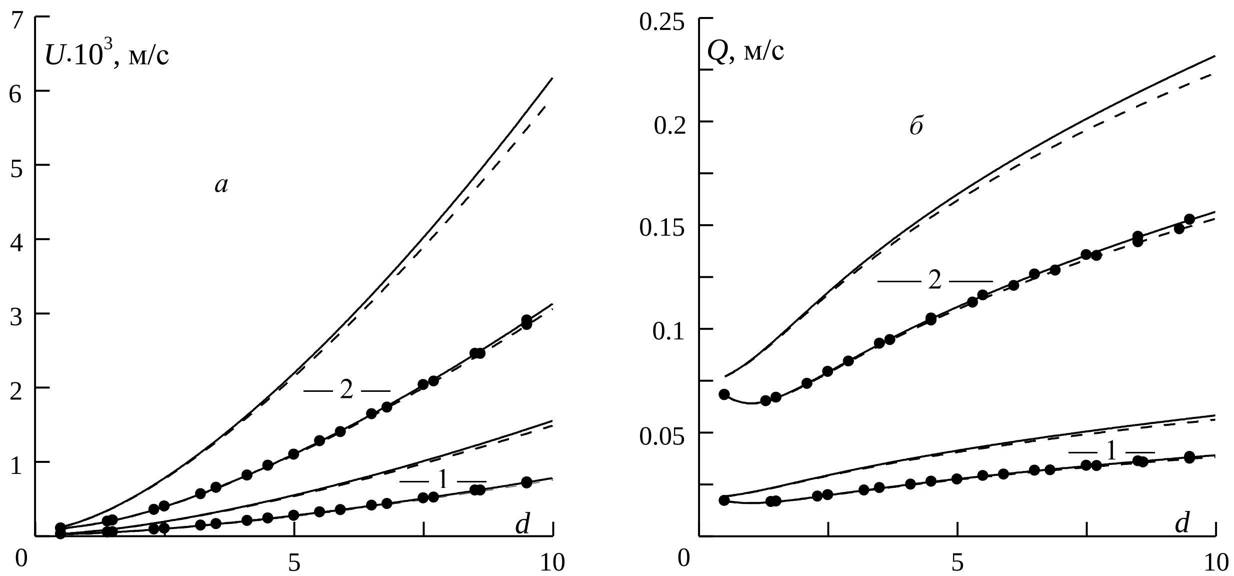

Рис. 8.3.2

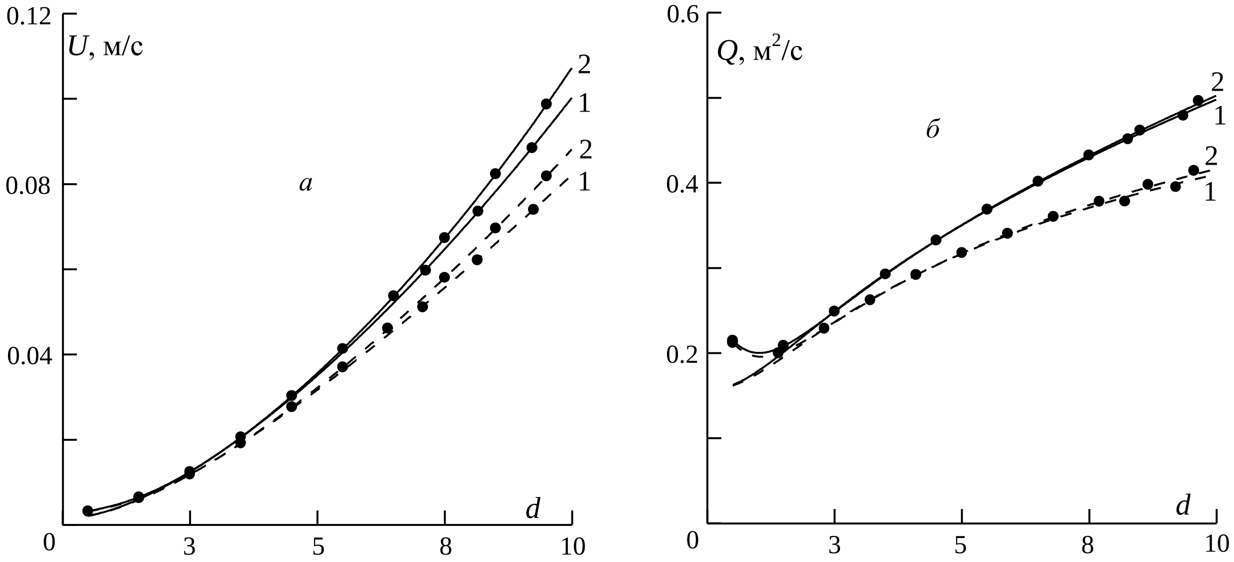

Рис. 8.3.3

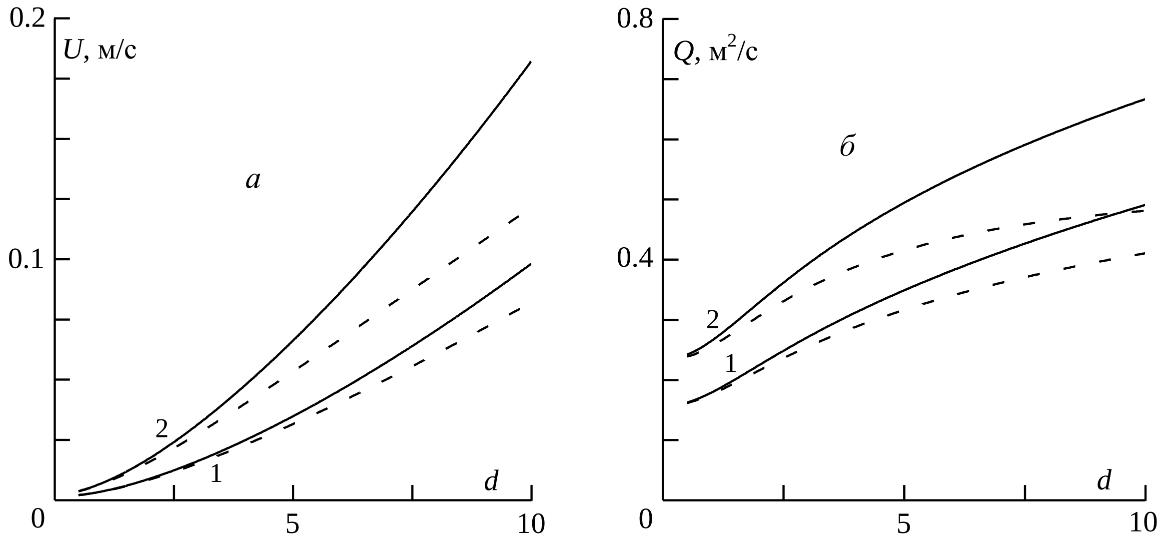

Рис. 8.3.4

ГЛАВА 9. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИМТУДЫ В БАССЕЙНЕ С ПЛАВАЮЩИМ СПЛОШНЫМ ЛЕДЯНЫМ ПОКРОВОМ

9.1. Уравнения для нелинейных приближений

Пусть на поверхности однородной идеальной несжимаемой жидкости постоянной глубины плавает тонкая упругая ледяная пластинка [12, 16, 48, 50, 51, 99, 105, 106, 107, 116, 135, 136, 151, 157, 159]. В горизонтальных направлениях пластинка и жидкость неограничены. Рассмотрим нелинейные колебания пластинки, предполагая движение жидкости потенциальным. В безразмерных величинах $x = kx_1$, $z = kz_1$, $t = \sqrt{kg}\,t_1, \zeta = k\zeta^*$, $\varphi = \left(k^2/\sqrt{kg}\right)\varphi^*$, где k волновое число, задача заключается в решении уравнения Лапласа

$$\varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0,\ -\infty < x < \infty,\ -H \le z \le \zeta \tag{9.1.1}$$

для потенциала скорости $\varphi(x, z, t)$ с граничными условиями на поверхности пластинка–жидкость ($z = \zeta$)

$$D_1 k^4 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + Q_1 k^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \kappa k \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right] = p, \tag{9.1.2}$$

$$p = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \zeta - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right],$$

и на дне ($z = -H$) бассейна

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \tag{9.1.3}$$

В начальный момент времени ($t = 0$)

$$\zeta = f(x), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0. \tag{9.1.4}$$

В (9.1.2.) – (9.1.4) приняты обозначения

$$D_1 = \frac{D}{\rho g}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad Q_1 = \frac{Q}{\rho g}, \quad \kappa = h\frac{\rho_1}{\rho},$$

E, h, ρ_1, ν – модуль нормальной упругости, толщина, плотность, коэффициент Пуассона пластинки; Q – продольное сжимающее усилие, приходящееся на единицу ширины пластинки; $\zeta(x, t)$ – прогиб пластинки или возвышение поверхности пластинка–жидкость; ρ – плотность жидкости; g – ускорение силы тяжести. Потенциал скорости и прогиб пластинки связаны кинематическим условием

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \tag{9.1.5}$$

В динамическом условии (9.1.2) выражение с множителем к представляет собой инерцию вертикальных смещений пластинки. Причем первое слагаемое в скобках этого выражения характеризует нелинейность вертикального ускорения пластинки, не учтенную в [46, 47].

Для решения задачи (9.1.1)–(9.1.5), представленной в безразмерных величинах, используем метод многих масштабов [85]. Введем две новые медленно меняющиеся по сравнению с $t=T_0$ переменные $T_1=\varepsilon t$, $T_2=\varepsilon^2 t$, где ε малое, но конечное, и предположим справедливость разложений

$$\zeta=\varepsilon\zeta_0,\quad \varphi=\varepsilon\varphi_0,\quad f=\varepsilon f_0,\quad \zeta_0=\zeta_1+\varepsilon\zeta_2+\varepsilon^2\zeta_3+O(\varepsilon^3), \tag{9.1.6}$$
$$\varphi_0=\varphi_1+\varepsilon\varphi_2+\varepsilon^2\varphi_3+O(\varepsilon^3),\quad f_0=f_1+\varepsilon f_2+\varepsilon^2 f_3+O(\varepsilon^3).$$

Подставив φ из (9.1.6) в (9.1.1) и (9.1.3), с точностью до величин третьего порядка малости получим равенства

$$\varepsilon\Delta\varphi_1+\varepsilon^2\Delta\varphi_2+\varepsilon^3\Delta\varphi_3=0,\quad \varepsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\varepsilon^2\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}+\varepsilon^3\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}=0,\ \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Рассмотрим динамическое (9.1.2), кинематическое (9.1.5) и начальное (9.1.4) условия. Представим потенциал скорости поверхности пластинка-жидкость $z=\varepsilon\zeta_0$ в виде

$$\varphi(x,t,\varepsilon\zeta_0)=\varphi(x,t,0)+\varepsilon\zeta_0\varphi_z(x,t,0)+\frac{1}{2}\varepsilon^2\zeta_0^2\varphi_{zz}(x,t,0)+\ldots.. \tag{9.1.7}$$

Подставим $\zeta=\varepsilon\zeta_0$, $f=\varepsilon f_0$, $\varphi(x,\,t,\,\varepsilon\zeta_0)$ и $\varphi_z(x,\,t,\,\varepsilon\zeta_0)$ в соответствующие условия (9.1.2) и (9.1.5), принимая при этом, что по правилу дифференцирования сложной функции частная производная по времени определяется выражением (6.1.12) и учитывая зависимость ζ_0 от x и t в (9.1.7). Тогда, собрав коэффициенты при одинаковых степенях ε и приравняв их нулю, найдем уравнения

$$\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial z^2}=0,\quad -\infty<x<\infty,\quad -H\le z\le 0, \tag{9.1.8}$$

$$D_1k^4\frac{\partial^4\zeta_n}{\partial x^4}+Q_1k^2\frac{\partial^2\zeta_n}{\partial x^2}-\kappa k\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial z\partial T_0}-\frac{\partial\varphi_n}{\partial T_0}+\zeta_n=F_n^{\,*},\quad z=0, \tag{9.1.9}$$

$$\frac{\partial\zeta_n}{\partial T_0}+\frac{\partial\varphi_n}{\partial z}=L_n,\quad (n=1,2,3), \tag{9.1.10}$$

$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial z}=0,\quad (z=-H), \tag{9.1.11}$$

$$\zeta_n=f_n(x),\quad \frac{\partial\zeta_n}{\partial T_0}=G_n,\quad t=0\ \ (n=1,2,3), \tag{9.1.12}$$

для определения нелинейных приближений.

В равенствах (9.1.9)–(9.1.12) принято

$$F_n^* = F_n + F_n^0, \quad F_1 = F_1^0 = L_1 = G_1 = 0, \quad (n = 1,2,3),$$

$$F_2 = \zeta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial T_1} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0}\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)^2\right] + \kappa k N,$$

$$N = \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \zeta_1 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_1 \partial z}, \quad L_2 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \zeta_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1},$$

$$F_3 = \zeta_1 N_1 + \zeta_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial T_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial T_2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + N_2 + \kappa k N_3,$$

$$N_1 = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_1 \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial T_0 \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2}\left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}\zeta_1 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z^2},$$

$$N_2 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0}\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\left(\frac{\partial \zeta_2}{\partial T_0} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right),$$

$$N_3 = \zeta_1 N_4 + \frac{1}{2}\zeta_1^2 \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z^3} + \zeta_2 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2}\left(\frac{\partial \zeta_2}{\partial T_0} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1}\right) + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial T_2} + N_5,$$

$$N_4 = \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial T_0 \partial z^2} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0}\frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^2 \partial T_1}, \quad N_5 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_0}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z \partial T_1},$$

$$L_3 = \zeta_1 N_6 - \zeta_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial \zeta_2}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial T_1} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial T_2} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\right)^2,$$

$$N_6 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} - \frac{1}{2}\zeta_1 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^3}, \quad F_2^0 = -\kappa k \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x},$$

$$F_3^0 = -\kappa k\left[\zeta_1 N_7 + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2}\right)\right],$$

$$N_7 = \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z}\right)^2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x \partial z^2}, \quad G_2 = -\frac{\partial \zeta_1}{\partial T_1}, \quad G_3 = -\frac{\partial \zeta_1}{\partial T_2} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial T_1}.$$

Отметим, что слагаемые F_2^0, F_3^0, входящие в правые части динамических условий (9.1.9) для второго ($n = 2$) и третьего ($n = 3$) приближений, обусловлены учетом нелинейности ускорения вертикальных смещений пластинки.

9.2. Выражения для потенциала скорости и возмущения поверхности лед–вода

Уравнения (9.1.8)–(9.1.12) получены для общего случая неустановившихся колебаний конечной амплитуды. Найдем решение этих уравнений в случае бегущих периодических волн, задавая первое приближение ($n = 1$) прогиба пластинки (возвышения поверхности пластинка–жидкость) в форме волны

$$\zeta_1 = \cos\theta, \quad \theta = x + \tau T_0 + \beta(T_1, T_2), \tag{9.2.1}$$

бегущей в отрицательном направлении оси x. Тогда из кинематического условия (9.1.10) находим

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \tau \sin\theta, \quad z = 0. \tag{9.2.2}$$

Чтобы удовлетворить граничному условию (9.1.11) на дне бассейна, представим φ_1 в виде

$$\varphi_1 = b_0 \mathrm{ch}(z + H)\sin\theta. \tag{9.2.3}$$

После подстановки (9.2.3) в (9.2.2) получим $b_0 = \tau\,\mathrm{sh}^{-1} H$. Следовательно,

$$\varphi_1 = b_1 \sin\theta, \quad b_1 = \tau\,\mathrm{sh}^{-1} H \mathrm{ch}(z + H). \tag{9.2.4}$$

Из динамического условия (9.1.9) с учетом (9.2.1), (9.2.4) для колебаний в линейном приближении найдем дисперсионное соотношение

$$\tau^2 = \left(1 - Q_1 k^2 + D_1 k^4\right)\left(1 + \kappa k\,\mathrm{th} H\right)^{-1} \mathrm{th} H, \tag{9.2.5}$$

а выражение, определяющее $\beta(T_1, T_2)$ в (9.2.1), получим из последующих приближений.

Подставив ζ_1 и φ_1 в правые части уравнений (9.1.9), (9.1.10) для второго приближения и решив задачу при $n = 2$, предполагая отсутствие основной гармоники, получим

$$\zeta_2 = a_2 \cos 2\theta, \quad \varphi_2 = b_2 \sin 2\theta, \tag{9.2.6}$$

$$a_2 = \frac{3\tau^2 \eta_2}{4\mu_2 \mathrm{th} H}, \quad b_2 = \frac{\tau \nu_2 \mathrm{ch} 2(z + H)}{4\mu_2 \mathrm{ch} 2H \mathrm{th} H}, \ \eta_2 = (\mathrm{th} H - \mathrm{cth} H - 2\kappa k)\mathrm{th} 2H,$$

$$\nu_2 = \tau^2(5\mathrm{th} H - \mathrm{cth} H + 2\kappa k) - 2(1 - 4Q_1 k^2 + 16 D_1 k^4),$$

$$\mu_2 = (1 - 4Q_1 k^2 + 16 D_1 k^4)\mathrm{th} 2H - 2\tau^2(1 + 2\kappa k\ \mathrm{th} H).$$

При этом оказывается, что функция θ не зависит от T_1, так как $\beta = \beta_2(T_2)$.

Полученные решения для первого (9.2.1), (9.2.4), (9.2.5) и второго (9.2.6) приближений определяют правые части динамического (9.1.9) и кинематического (9.1.10) условий задачи для третьего приближения ($n = 3$). Исключив в них слагаемые, порождающие секулярность, для ζ_3 и φ_3 найдем

$$\zeta_3 = a_3 \cos 3\theta, \ \varphi_3 = b_3 \sin 3\theta, \ a_3 = \frac{\tau^2 \eta_3}{\mu_3}, b_3 = \frac{\tau \nu_3 \mathrm{ch} 3(z + H)}{3\mu_3 \mathrm{ch} 3H},$$

в которых введены следующие обозначения

$$\eta_3 = (l_1 - 3\kappa k l_2)\mathrm{th} 3H - l_2, \quad \nu_3 = 3\tau^2 l_1 - l_2(1 - 9Q_1 k^2 + 81 D_1 k^4),$$

$$l_1 = \kappa k\, l_{11} + l_{12}, \quad l_2 = \frac{1}{2} a_2\left(3\mathrm{cth} H + 6\mathrm{cth} 2H\right) - \frac{3}{2}\mathrm{cth} H \mathrm{cth} 2H + \frac{5}{8},$$

$$l_{11} = a_2\left(5\,\mathrm{cth}\,2H - \frac{1}{2}\mathrm{cth}H\right) + \frac{1}{2}(\mathrm{cth}H - 5\,\mathrm{cth}\,2H)\mathrm{cth}H - \frac{1}{8},$$

$$l_{12} = a_2\left(\frac{11}{2} - \mathrm{cth}H\mathrm{cth}\,2H\right) + \left(\frac{1}{2}\mathrm{cth}H\mathrm{cth}\,2H - \frac{15}{8}\right)\mathrm{cth}H\,,$$

$$\mu_3 = \left(1 - 9Q_1k^2 + 81D_1k^4\right)\mathrm{th}3H - 3\tau^2(1 + 3\kappa k\ \mathrm{th}3H),$$

$$\beta = \tau\sigma_0 T_2, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2}\left[l_3 - l_4(\kappa k + \mathrm{cth}H)^{-1}\right],$$

$$l_3 = \frac{1}{2}a_2(\mathrm{cth}H + 2\,\mathrm{cth}\,2H) - \frac{1}{2}\mathrm{cth}H\mathrm{cth}\,2H - \frac{3}{8},$$

$$l_4 = \kappa k\, l_{41} - l_{42}, \quad l_{41} = a_2\left(\mathrm{cth}\,2H - \frac{5}{2}\mathrm{cth}H\right) + \frac{1}{2}(\mathrm{cth}H - \mathrm{cth}\,2H)\mathrm{cth}H - \frac{3}{8},$$

$$l_{42} = a_2\left(\frac{1}{2} + \mathrm{cth}H\,\mathrm{cth}\,2H\right) - \frac{1}{2}\left(\mathrm{cth}H\,\mathrm{cth}\,2H - \frac{5}{4}\right)\mathrm{cth}H\,.$$

В результате прогиб пластинки ζ и потенциал скорости движения жидкости φ в безразмерных величинах до третьего порядка малости определяются из выражений

$$\zeta = \sum_{n=1}^{3}\varepsilon^n a_n \cos n\theta, \ \ \varphi = \sum_{n=1}^{3}\varepsilon^n b_n \sin n\theta,$$

$$\theta = x + \sigma t, \quad \sigma = \tau\left(1 + \varepsilon^2\sigma_0\right), \quad a_1 = 1.$$

В размерных величинах ($\zeta^* = \zeta / k$, $\varphi^* = \varphi\sqrt{kg} / k^2$, $x_1 = x/k$, $z_1 = z / k$, $t_1 = t\big/\sqrt{kg}$, $\varepsilon = ak$, где a – амплитуда начальной гармоники) имеем формулы

$$\zeta = a\cos\theta + a^2ka_2\cos 2\theta + a^3k^2a_3\cos 3\theta, \tag{9.2.7}$$

$$\varphi = a\sqrt{g / k}\, b_1 \sin\theta + a^2\sqrt{kg}\, b_2 \sin 2\theta + a^3k\sqrt{kg}\, b_3 \sin 3\theta,$$

$$\theta = kx + \sigma_1(1 + \sigma^0)t, \quad \sigma^0 = a^2k^2\sigma_0, \quad \sigma_1 = \tau\sqrt{kg}.$$

Здесь и далее индекс 1 у x, z, t и звездочка у ζ и φ опущены, а τ определяется дисперсионным соотношением (9.2.5). Фазовую скорость волновых возмущений определим из выражения

$$v = \tau\sqrt{g / k}(1 + \sigma^0).$$

Полученное решение (9.2.7) справедливо вне малых окрестностей резонансных значений волнового числа k, являющихся положительными действительными корнями $k = k_1$ и $k = k_2$ уравнений $\mu_2 = 0$ и $\mu_3 = 0$ соответственно.

9.3. Оценка влияния толщины и модуля упругости плавающей ледяной пластинки на амплитудно-фазовые характеристики волнового возмущения

Рассмотрим влияние упругих и массовых сил ледяного покрова на волновые характеристики при отсутствии ледового сжатия, полагая в (9.1.2) и последующих выражениях продольное сжимающее усилие Q равным нулю. Для этого случая решение (9.2.7) упрощается. В приближении коротких волн ($kH >> 1$) коэффициенты a_2, a_3, b_2, b_3 и σ_0 принимают вид

$$a_2 = \frac{3\kappa k}{2\Delta_2}\left(1 + D_1 k^4\right), \quad b_2 = -\frac{1}{2\Delta_2} e^{2kz}\sqrt{\frac{1 + D_1 k^4}{1 + \kappa k}}\left[1 - (14 + 15\kappa k) D_1 k^4\right],$$

$$a_3 = \left[1 + 2\kappa k + 24(\kappa k)^2 - A D_1 k^4 - A_1 (D_1 k^4)^2\right]/\left(4\Delta_2\Delta_3\right),$$

$$b_3 = e^{3kz}\sqrt{\left(1 + D_1 k^4\right)/\left(1 + \kappa k\right)}\left[13 + 7\kappa k + 12\left(\kappa k\right)^2 - B D_1 k^4 + 2B_1\left(D_1 k^4\right)^2\right]/$$

$$/\left(24\Delta_2\Delta_3\right),$$

$$A = 13 - 4\kappa k - 63\left(\kappa k\right)^2, \quad A_1 = 14 - 2\kappa k - 39\left(\kappa k\right)^2,$$

$$B = 499 - 529\left(\kappa k\right) - 1014\left(\kappa k\right)^2, \quad B_1 = 1899 + 4461\kappa k + 2601\left(\kappa k\right)^2,$$

$$\Delta_2 = 1 + 3\kappa k - 2\left(7 + 6\kappa k\right) D_1 k^4, \quad \Delta_3 = 1 + 4\kappa k - 3\left(13 + 12\kappa k\right) D_1 k^4,$$

$$\sigma_0 = -\left\{3 - 7\kappa k - 12\left(\kappa k\right)^2 - 2\left[21 + 41\kappa k + 21\left(\kappa k\right)^2\right] D_1 k^4\right\}/\left[8\left(1 + \kappa k\right)\Delta_2\right],$$

а для резонансных значений k_1 и k_2 волнового числа k находим оценки

$$k_1 < \frac{1}{\sqrt[4]{4D_1}}, \quad k_2 < \frac{1}{\sqrt[4]{9D_1}}, \quad k_2 < k_1.$$

Для общего случая на рис. 9.3.1 показаны зависимости резонансных значений волнового числа от толщины ледяной пластины при $H = 100$ м (рис. 9.3.1 *а*) и от глубины слоя жидкости при $h = 0.5$ м (рис. 9.3.1 *б*), полученные при $\rho_1/\rho = 0.87$, $\nu = 0.34$. Сплошные линии соответствуют k_1, а штриховые – k_2. Номерами 1 и 2 обозначены зависимости при модуле упругости льда E (Н/м^2) равном $3\cdot 10^9$ и $5\cdot 10^8$ соответственно.

На рисунке видно, что при фиксированной глубине бассейна с уменьшением цилиндрической жесткости ледяного покрова значения k_1 и k_2 увеличиваются, стремясь к бесконечности в жидкости с открытой поверхностью ($h = 0$) и в жидкости покрытой абсолютно гибкой пластиной (битым льдом).

Влияние глубины слоя жидкости выражается в увеличении значений k_1, k_2. Однако при уменьшении жесткости ледяной пластины глубина H, при которой это влияние существенно, также уменьшается.

Для оценки влияния толщины и модуля упругости плавающей ледяной пластины на амплитудно-фазовые характеристики волнового возмущения проведены численные расчеты при тех же значениях параметров E, ν, ρ_1/ρ, что и для рис.9.3.1.

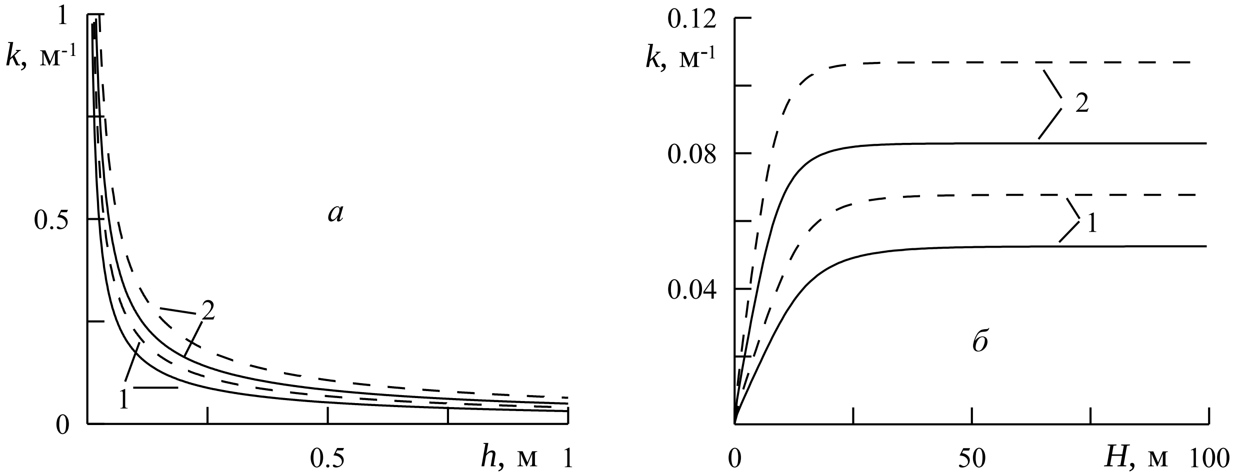

Рис. 9.3.1.

Профили возмущения поверхности лед–вода вдоль оси x приведены на рис. 9.3.2 при $H = 10$ м, $h = 0.7$ м, $k = 0.04$ м$^{-1}$, $t = 150$ с, $\varepsilon = 0.08$ (рис. 9.3.2 *а*) и при $H = 100$ м, $h = 0.15$ м, $k = 0.165$ м$^{-1}$, $t = 70$ с, $\varepsilon = 0.33$ (рис. 9.3.2 *б*). Сплошные линии характеризуют распределение ζ/a без учета нелинейности вертикальных смещений ледяной пластины, а штриховые – с учетом. Номерами 1 и 2 обозначены профили при $E = 3\cdot10^9$ Н/м^2 и $E = 0$ соответственно.

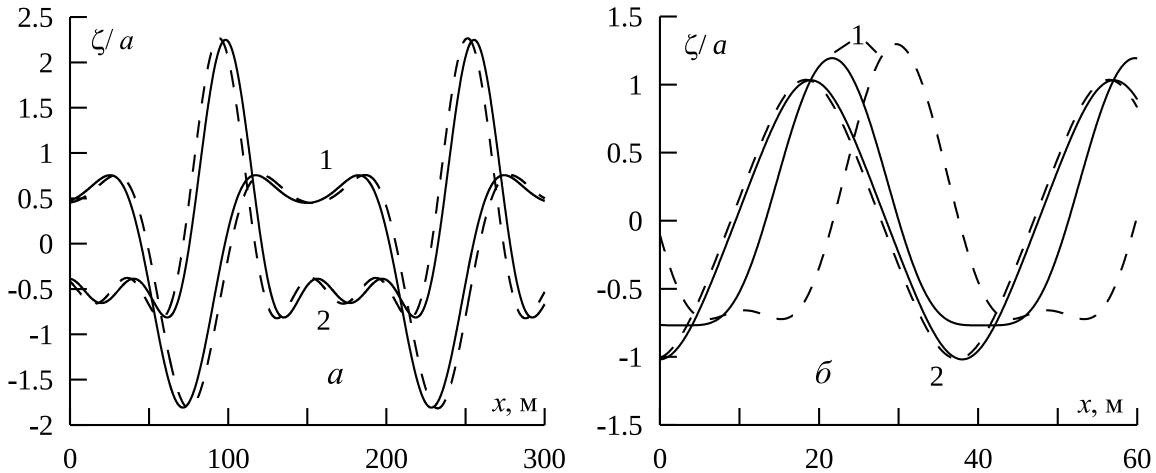

Рис. 9.3.2.

Анализ результатов расчетов показывает, что характер воздействия цилиндрической жидкости ледяной пластины на структуру возмущений определяется глубиной слоя жидкости H, длиной $\lambda = 2\pi / k$ и наклоном $\varepsilon = ak$ волны начальной основной гармоники. Видно, что упругость ледяного покрова может оказывать влияние не только на амплитуду колебаний, уменьшая её, но и на форму волнового профиля. При этом в коротковолновом диапазоне (рис. 9.3.2 *б*) при увеличении упругости ледяной пластины влияние высших гармоник также увеличивается. Кроме того, учет нелинейности ускорения вертикальных смещений приводит к сдвигу фазы колебаний в направлении движения волны, в случае если пластина абсолютно гибкая ($E = 0$), и отставанию фазы колебаний в случае упругой пластины. Количественную оценку изменения фазы колебаний за счет учета нелинейности ускорения позволяют получить графики, приведенные на рис. 9.3.3 и рис. 9.4.4. Они показывают распределения величины сдвига $|\sigma^0|$ фазы колебаний и фазовой скорости v при $E = 3\cdot10^9$ Н/м^2. Сплошными линиями приведены графики, полученные без учета, а штриховыми с учетом нелинейности ускорения вертикальных смещений. Штрихпунктирные линии характеризуют фазовую скорость основной линейной гармоники. Номерам 1 и 2 отвечают толщины льда 0.5 м и 1 м.

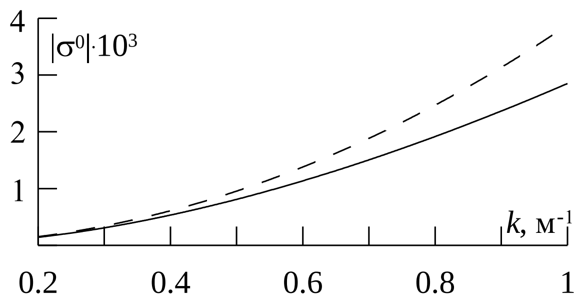

Рис. 9.33

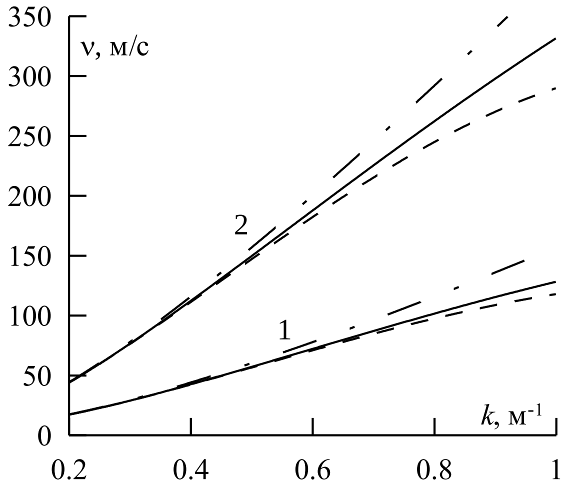

Рис. 9.3.4

Следует отметить, что кривые на рис. 9.3.3, 9.3.4 приведены только для участка изгибной ветви дисперсионной зависимости фазовой скорости. Влияние нелинейности ускорения в области гравитационной ветви, где сила тяжести больше силы упругости, качественно такое же, как и в случае абсолютной гибкой пластины (битый лед) [25]. На изгибно-гравитационном участке дисперсионной кривой [66] фазовая скорость может как увеличиваться, так и уменьшаться за счет нелинейности вертикальных ускорений.

Таким образом, можно заключить, что упругость ледяного покрова обусловливает не только уменьшение амплитуды волн изгиба, но и изменение формы профиля волны вдоль направления её перемещения.

9.4. Оценка влияния продольного сжатия на амплитудно-фазовые характеристики волнового возмущения

Уравнения $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = 0$, определяющие резонансные значения k_1 и k_2 волнового числа k для решения (9.2.7), при учете продольного сжимающего усилия ($Q \neq 0$) в приближении глубокой воды ($kH >> 1$) принимают вид

$$2D_1k^4(7+6\kappa k)-2Q_1k^2-3\kappa k-1=0,$$
$$3D_1k^4(13+12\kappa k)-3Q_1k^2-4\kappa k-1=0.$$

Пренебрегая здесь слагаемыми, обусловленными инерцией ледяной пластинки ($\kappa = 0$), находим

$$k_1=\left(\frac{Q_1+\sqrt{Q_1^2+14D_1}}{14D_1}\right)^{1/2}, \quad k_2=\left(\frac{3Q_1+\sqrt{9Q_1^2+156D_1}}{78D_1}\right)^{1/2},$$

а при отсутствии сжатия ($Q = 0$)

$$k_1=1\big/\sqrt[4]{14D_1}, \quad k_2=1\big/\sqrt[4]{39D_1}.$$

В случае мелкой воды ($kH << 1$) резонансные значения k_1 и k_2 являются корнями уравнений

$$4\kappa HD_1k^4+5D_1k^2-\kappa H-Q_1=0,$$
$$9\kappa HD_1k^4+10D_1k^2-\kappa H-Q_1=0.$$

из решения которых получим

$$k_1=\left[\frac{5}{8\kappa H}\left(\sqrt{1+\frac{16\kappa H(\kappa H+Q_1)}{25D_1}}-1\right)\right]^{1/2},$$

$$k_2=\left[\frac{5}{9\kappa H}\left(\sqrt{1+\frac{9\kappa H(\kappa H+Q_1)}{25D_1}}-1\right)\right]^{1/2},$$

а пренебрежение инерцией пластинки ($\kappa = 0$) приводит к значениям

$$k_1=\sqrt{Q_1/(5D_1)}, \; k_2=\sqrt{Q_1/(10D_1)}.$$

В общем случае результаты проведенных численных расчетов свидетельствуют о том, что при фиксированной глубине жидкости значения k_1 и k_2, являющиеся корнями уравнений $\mu_1 = 0$ и $\mu_2 = 0$, возрастают с уменьшением модуля упругости льда. Увеличение сжимающего усилия приводит к их росту. Увеличение глубины жидкости также обусловливает рост значений k_1 и k_2. Однако верхняя граница значений глубины H, где это влияние существенно, убывает с уменьшением модуля упругости, но растет с уменьшением сжимающего усилия. При фиксированных E и Q уменьшение толщины ледяной пластинки сопровождается увеличением k_1 и k_2.

Графики на рис. 9.4.1 иллюстрируют зависимость k_1 (штриховые линии) и k_2 (сплошные линии) от толщины пластинки при H = 20 м. Они получены при $\rho_1 / \rho = 0.87$, ν = 0.34, соответствующих ледяной пластинке. Кривым с номерами 1 и 2 на рис. 9.4.1 *а* отвечают величины модуля упругости $3 \cdot 10^9$ и $5 \cdot 10^8$ Н/м^2 при $Q_1 = 0$, а на рис. 9.4.1 *б* величины $Q_1 = 0$ и $Q_1 = \sqrt{D_1}$ при $E = 3 \cdot 10^9$ Н/м^2. Изолинии значений k_1 и k_2 в плоскости H, Q_1 при h = 0.5 м представлены соответственно на рис. 9.4.2 *а* и рис. 9.4.2 *б*, где $Q_1 = 2\sqrt{D_1} = 120\,\text{м}^2$.

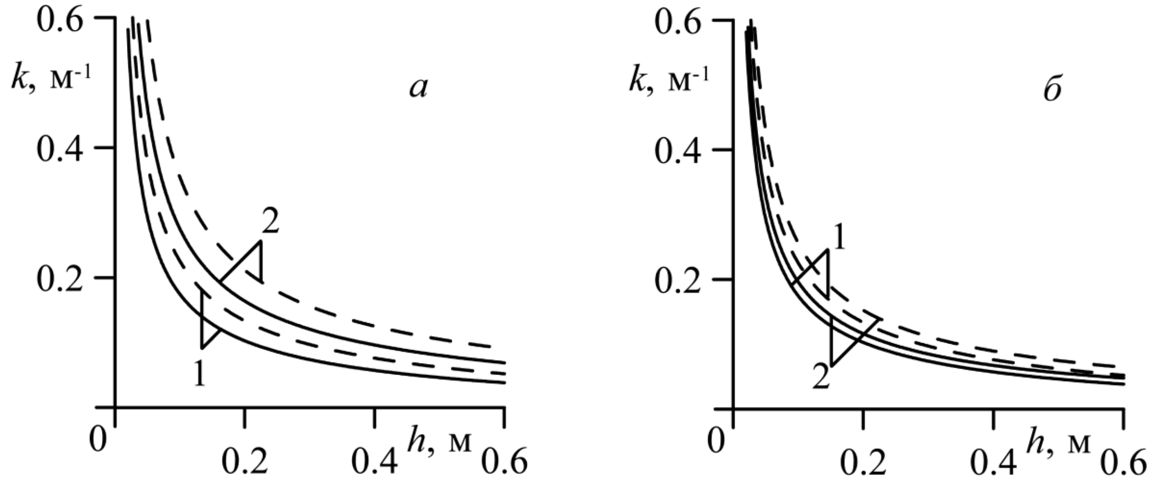

Рис. 9.4.1

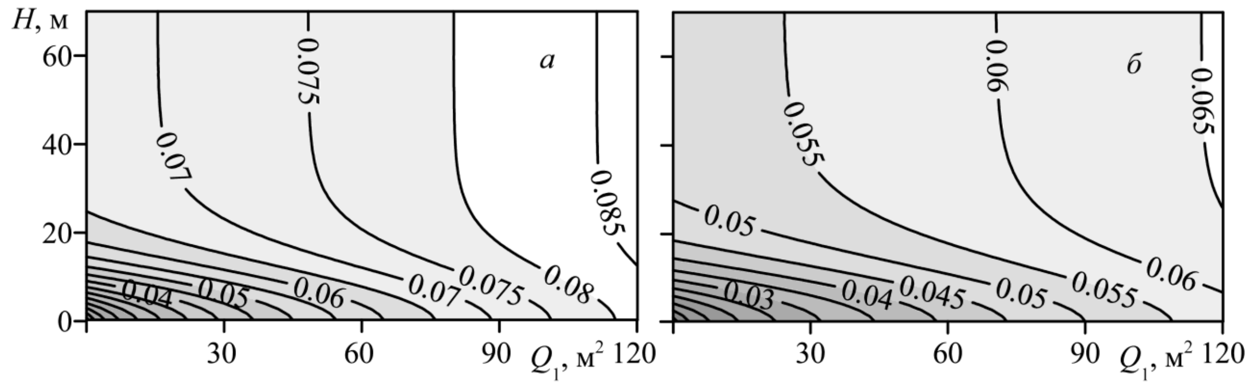

Рис. 9.4.2

Если пластинка абсолютно гибкая (E = 0) и Q = 0, то решение для жидкости конечной глубины справедливо при любых значениях волнового числа [130].

Численные расчеты распределений высоты вертикального смещения поверхности пластинка–жидкость (прогиба пластинки) вдоль направления перемещения волны, показали, что структуру возмущений определяют не только цилиндрическая жесткость пластинки и сжимающее усилие, но и глубина жидкости, длина $(\lambda = 2\pi/k)$ и крутизна $(\varepsilon = ak)$ волны начальной основной гармоники. Влияние этих параметров сказывается в изменении вклада высших гармоник в колебания, а следовательно, и вида профиля волны прогиба. Это иллюстрируют графики на рис. 9.4.3, 9.4.4, построенные при $H = 10$ м, $t = 70$ с, $k = 0.035$ м$^{-1}$ (рис. 9.4.3) и $H = 20$ м, $t = 10$ с, $k = 0.133$ м$^{-1}$ (рис. 9.4.4) для тех же ν и ρ_1/ρ, что и на рис. 9.4.1. Сплошные, штриховые и штрихпунктирные линии отвечают значениям Q_1, равным 0, $\sqrt{D_1}$, $1.95\sqrt{D_1}$ при $E = 3\cdot 10^9$ Н/м^2, $h = 0.2$ м, $a = 1$ м. Приведенные распределения $\zeta(x)$ свидетельствуют также о влиянии сжимающего усилия на фазовую скорость волны изгиба пластинки. Для указанных параметров при фиксированном модуле упругости E она убывает с ростом сжимающего усилия Q при любом $k \neq k_1$. Отставание фазы (волна распространяется в отрицательном направлении оси x) обусловливается и увеличением модуля упругости при фиксированном $Q_1 \neq 0$ и $k < k_1$. Если $k > k_1$, то рост E при заданном $Q_1 \neq 0$ увеличивает фазовую скорость. При отсутствии сжатия ($Q = 0$) с ростом E растет и величина фазовой скорости волны изгиба при любых $k \neq k_1$.

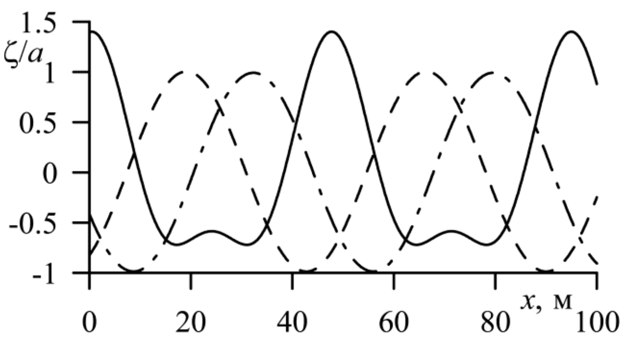

Рис. 9.4.3

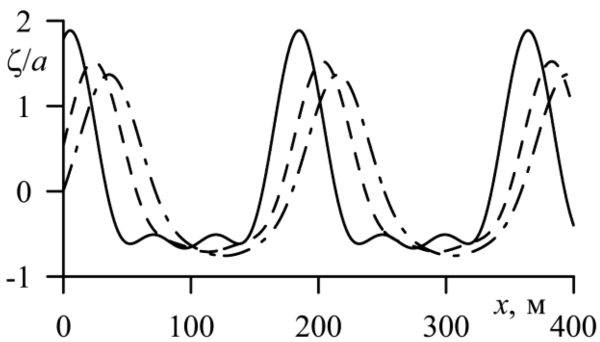

Рис. 9.4.4

Нелинейность ускорения вертикальных смещений пластинки обусловливает сдвиг фазы колебаний в направлении движения волны изгиба и слабому увеличению их амплитуды, если пластинка абсолютно гибкая ($E = 0$). В случае упругой пластинки влияние нелинейности ускорения на фазу колебаний заметно проявляется при $k > k_1$. Оно выражается в отставании фазы как при отсутствии, так и при включении сжатия. Причем это влияние убывает с увеличением длины волны изгиба начальной основной гармоники.

ГЛАВА 10. СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКИХ ЧАСТИЦ ПОД ПЛАВАЮЩИМ ЛЕДЯНЫМ ПОКРОВОМ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ПРОГРЕССИВНОЙ ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

10.1. Выражения для составляющих орбитальной скорости движения частиц жидкости

В случае прогрессивной волны конечной амплитуды [22], бегущей в отрицательном направлении оси x, потенциал скорости движения жидких частиц под плавающим льдом с точностью до третьего приближения определяется выражением

$$\varphi = \sum_{n=1}^{3} \varepsilon^n b_n \sin n\theta. \qquad (10.1.1)$$

Здесь

$$\theta = x + \sigma t,\ \ \sigma = \tau\left(1+\varepsilon^2\sigma_0\right),\ \ \tau^2 = \left(1+D_1 k^4\right)\left(1+\kappa k \operatorname{th} H\right)^{-1} \operatorname{th} H,$$

$$b_1 = \frac{\tau \operatorname{ch}(z+H)}{\operatorname{sh} H},\ \ b_2 = \frac{\tau\nu_2 \operatorname{ch} 2(z+H)}{4\mu_2 \operatorname{ch} 2H \operatorname{th} H},\ \ b_3 = \frac{\tau\nu_3 \operatorname{ch} 3(z+H)}{3\mu_3 \operatorname{ch} 3H},$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}\left[l_3 - l_4\left(\kappa k + \operatorname{ch} H\right)^{-1}\right],\ \ \nu_2 = \tau^2\left(5 \operatorname{th} H - \operatorname{cth} H + 2\kappa k\right) - 2\left(1+16 D_1 k^4\right),$$

$$\mu_2 = \left(1+16 D_1 k^4\right)\operatorname{th} 2H - 2\tau^2(1+2\kappa k \operatorname{th} 2H),$$

$$\nu_3 = 3\tau^2 l_1 - l_2\left(1+81 D_1 k^4\right),\ \ \mu_3 = \left(1+81 D_1 k^4\right)\operatorname{th} 3H - 3\tau^2(1+3\kappa k \operatorname{th} 3H),$$

$$l_1 = \kappa k l_{11} + l_{12},\ \ l_2 = (1/2)a_2(3 \operatorname{cth} H + 6 \operatorname{cth} 2H) - (3/2)\operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H + 5/8,$$

$$l_{11} = a_2(5 \operatorname{cth} 2H - (1/2)\operatorname{cth} H) + (1/2)\operatorname{cth} H - 5 \operatorname{cth} 2H)\operatorname{cth} H - 1/8,$$

$$l_{12} = a_2(11/2 - \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H) + ((1/2)\operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H - 15/8)\operatorname{cth} H,$$

$$l_3 = (1/2)a_2(\operatorname{cth} H + 2 \operatorname{cth} 2H) - (1/2)\operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H - 3/8,\ l_4 = \kappa k l_{41} - l_{42},$$

$$l_{41} = a_2(\operatorname{cth} 2H - (5/2)\operatorname{cth} H) + (1/2)(\operatorname{cth} H - \operatorname{cth} 2H)\operatorname{cth} H - 3/8,$$
$$l_{42} = a_2(1/2 + \operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H) - (1/2)(\operatorname{cth} H \operatorname{cth} 2H - 5/4)\operatorname{cth} H,$$

$$a_2 = 3\tau^2(\operatorname{th} H - \operatorname{cth} H - 2\kappa k)\operatorname{th} 2H/(4\mu_2 \operatorname{th} H).$$

В размерных переменных ($\varphi = \varphi\sqrt{kg}/k^2$, $\varepsilon = ak$, a – амплитуда начальной гармоники) имеем

$$\varphi = a\sqrt{g/k}\,b_1 \sin\theta + a^2\sqrt{kg}\,b_2 \sin 2\theta + a^3 k\sqrt{kg}\,b_3 \sin 3\theta,$$

$$\theta = kx + \sigma_1\left(1+\sigma^0\right)t,\ \ \sigma^0 = a^2k^2\sigma_0,\quad \sigma_1 = \tau\sqrt{kg},$$
$$\tau^2 = \left(1+D_1k^4\right)\left(1+\kappa k\,\mathrm{th}kH\right)^{-1}\mathrm{th}kH,$$
$$b_1 = \frac{\tau\mathrm{ch}k(z+H)}{\mathrm{sh}kH},\quad b_2 = \frac{\tau v_2\mathrm{ch}2k(z+H)}{4\mu_2\mathrm{ch}2kH\,\mathrm{th}kH},\quad b_3 = \frac{\tau v_3\mathrm{ch}3k(z+H)}{3\mu_3\mathrm{ch}3kH},$$

а в выражениях σ_0, v_2, v_3, μ_2, μ_3 аргумент гиперболических функций заменяется на kH. Отсюда для горизонтальной $u = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$ и вертикальной $w = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$ составляющих скорости движения жидкости получим

$$u = a\sqrt{kg}\left(b_1\cos\theta + 2akb_2\cos 2\theta + 3a^2k^2b_3\cos 3\theta\right),$$
$$w = a\sqrt{kg}\left(b_{11}\sin\theta + 2akb_{21}\sin 3\theta + 3a^2k^2b_{31}\sin 3\theta\right),$$
$$b_{11} = \frac{\tau\mathrm{sh}k(z+H)}{\mathrm{sh}kH},\ b_{21} = \frac{\tau v_2\mathrm{sh}2k(z+H)}{4\mu_2\mathrm{ch}2kH\,\mathrm{th}kH},\ b_{31} = \frac{\tau v_3\mathrm{sh}3k(z+H)}{3\mu_3\mathrm{ch}3kH}. \quad (10.1.3)$$

Отметим, что полученное решение справедливо вне малых окрестностей значений волнового числа $k = k_1$ и $k = k_2$, являющихся корнями уравнений $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = 0$ соответственно.

10.2. Влияние характеристик ледяного покрова на составляющие скорости движения жидкости

Для количественной оценки влияния плавающего льда на величины составляющих скорости и их распределения вдоль направления перемещения волны проводились численные расчеты при $\rho_1/\rho = 0.87$; $\nu = 0.34$; $0 \le h \le 2$м; $z = 0$ и значениях модуля нормальной упругости E, равных 0; 10^8; $5\cdot10^8$; 10^9; $3\cdot10^9$ Н/м^2.

На рис. 10.2.1 приведены распределения u и w вдоль профиля волны при $t = 1120$ с, $a = 2$м, $\lambda = 1256$ м, $H = 50$ м. Сплошные, штрихпунктирные и штриховые линии соответствуют толщине битого ($E = 0$) льда 0, 1, 2 м. Видно, что с ростом толщины льда происходит отставание фазы и уменьшение значений составляющих скорости. В точках экстремальных значений на профиле $u(x)$ вертикальная составляющая скорости, как и в линейном случае, равна нулю. Однако точкам экстремальных значений на профиле $w(x)$ соответствуют ненулевые величины горизонтальной составляющей скорости при рассмотренных толщинах льда.

В случае коротких волн увеличение толщины битого льда также уменьшает амплитудные значения составляющих скорости и обусловливает отставание фазы колебаний. При этом вид профилей их распределений вдоль направления распространения волны приближается к синусоидальному. Это иллюстрируют графики на рис. 10.2.2, где сплошным, штриховым и штрихпунктирным линиям соответствуют толщины льда 0; 0.5; 1 м при t = 300 с, H = 50 м, a = 0.15 м, λ = 10.47 м.

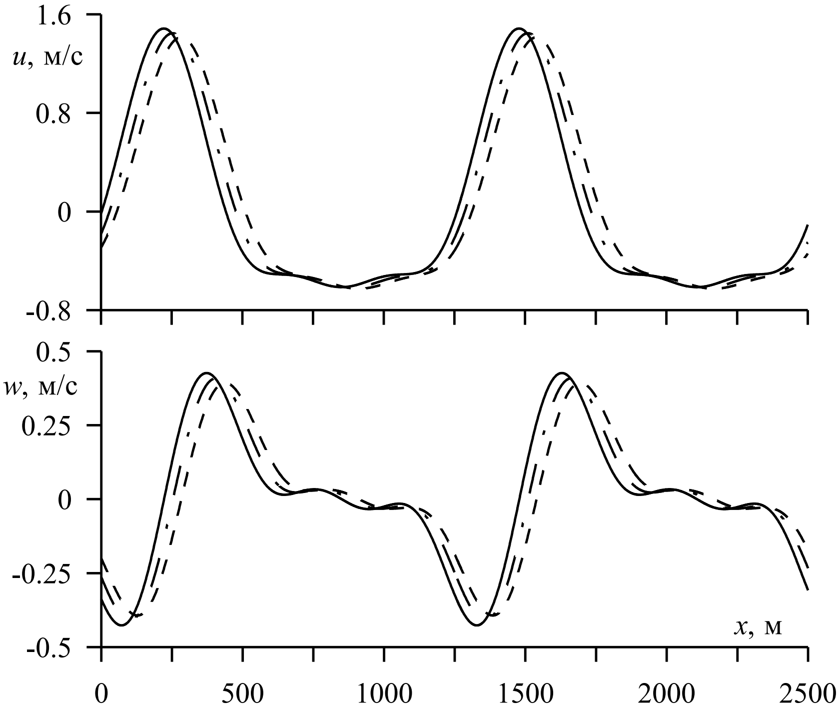

Рис. 10.2.1.

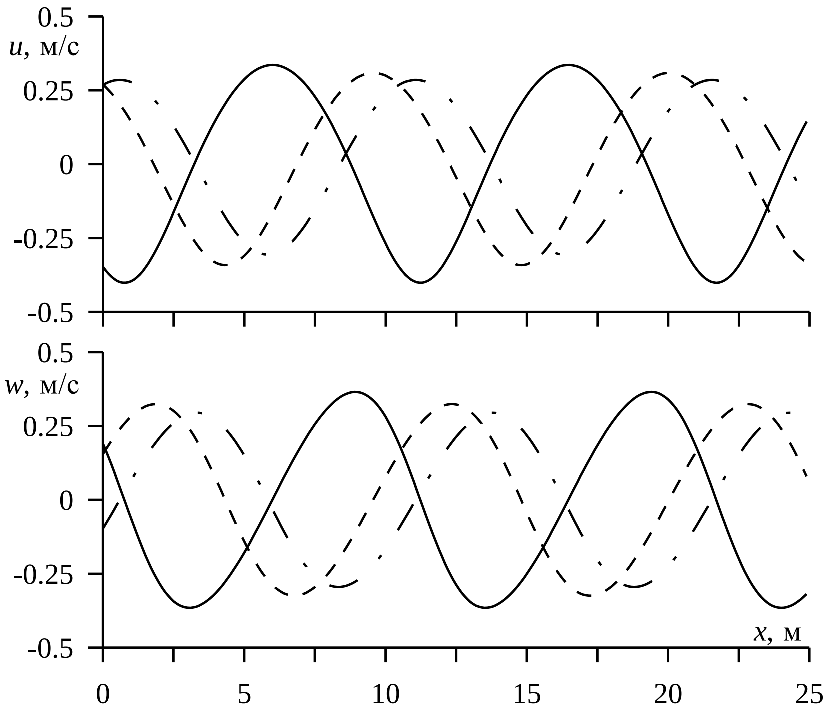

Рис. 10.2.2.

Отношение максимальных по длине волны значений вертикальной (W) и горизонтальной (U) составляющих скорости для a = 1 м приведено на рис. 10.2.3 в случае битого льда (E = 0). Линии 1 и 2 соответствуют здесь значениям глубины бассейна 30 и 10 м, сплошные и штрихпунктирные линии – толщинам льда 0 и 1 м. Штриховые линии характеризуют распределения W/U по k в линейном случае. Графики показывают, что рассмотренное отношение всегда меньше единицы. Следовательно, вертикальная составляющая скорости не превышает горизонтальную. При изменении k в области малых значений в нелинейном случае отношение изменяется немонотонно. При уменьшении длины волны величина отношения приближается к единице, что свидетельствует об уменьшении влияния нелинейности. Кроме того, в нелинейном случае распределение отношения W/U по волновому числу имеет экстремумы. Наличие битого льда приводит к их увеличению. Однако в области коротких волн влияние льда на величину отношения убывает. С уменьшением глубины бассейна положение экстремумов смещается в сторону больших значений волнового числа. В коротковолновой области влияние глубины не проявляется.

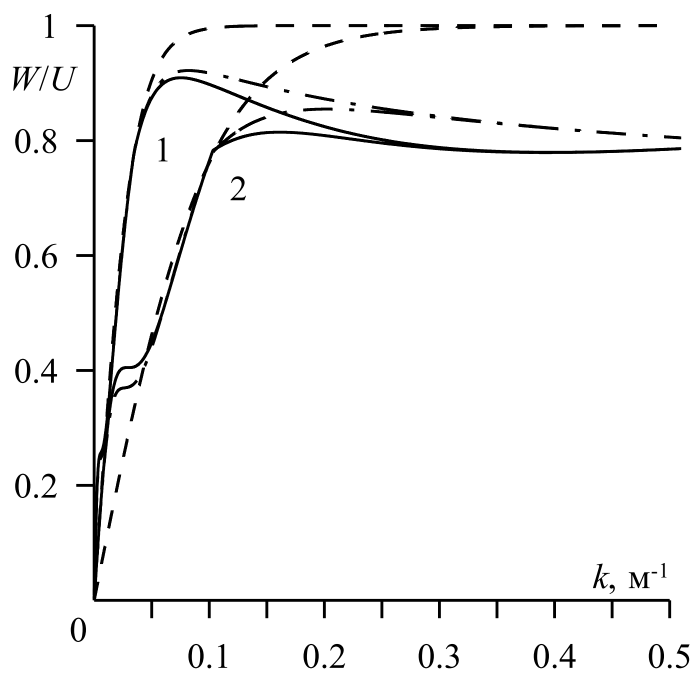

Рис. 10.2.3.

Влияние упругости сплошного ледяного покрова на распределение составляющих скорости вдоль профиля волны иллюстрируют графики на рис. 10.2.4, 10.2.5. На рис. 10.2.4 штриховым, штрихпунктирным и сплошным линиям соответствуют значения модуля упругости, равные

0; $5\cdot10^8$; $3\cdot10^9$ Н/м^2 при t = 7200 с, λ = 1570 м, h = 2 м при тех же величинах a и H, что и для рис. 10.2.1. Поведение графиков свидетельствует о том, что изменение жесткости ледяного покрова практически не проявляется в изменениях максимальных значений составляющих скорости движения жидкости, но приводит к заметному сдвигу фазы колебаний в направлении распространения длинной изгибно-гравитационной волны конечной амплитуды. С уменьшением длины волны влияние упругости льда усиливается. Оно проявляется как в увеличении максимальных значений w и u, так и в увеличении фазовой скорости. Это видно из графиков на рис. 10.2.5, где сплошными, штриховыми и штрихпунктирными линиями обозначены распределения w и u по x при $E = 3\cdot10^9$; 10^9; 10^8 Н/м^2 для значений t = 270 с, λ = 57.1 м, h = 0.6 м, a = 0.6 м, H = 15 м.

Распределение отношения W/U по волновому числу для значений $E = 10^9$, $3\cdot10^9$ Н/м^2 показано на рис. 10.2.6 кривыми 1 и 2 при $t = 0$, H = 10 м, h = 1 м, a = 1 м, λ = 628 м. Штриховая линия соответствует линейному приближению, для которого отношение при указанных величинах модуля упругости одно и то же. Анализ графиков показывает, что экстремальные значения на распределениях W/U по k уменьшаются с увеличением модуля упругости и смещаются в сторону больших значений волнового числа. Однако, начиная с некоторого значения k, рассматриваемое отношение не меняется с изменением E, оставаясь меньшим, чем в линейном случае.

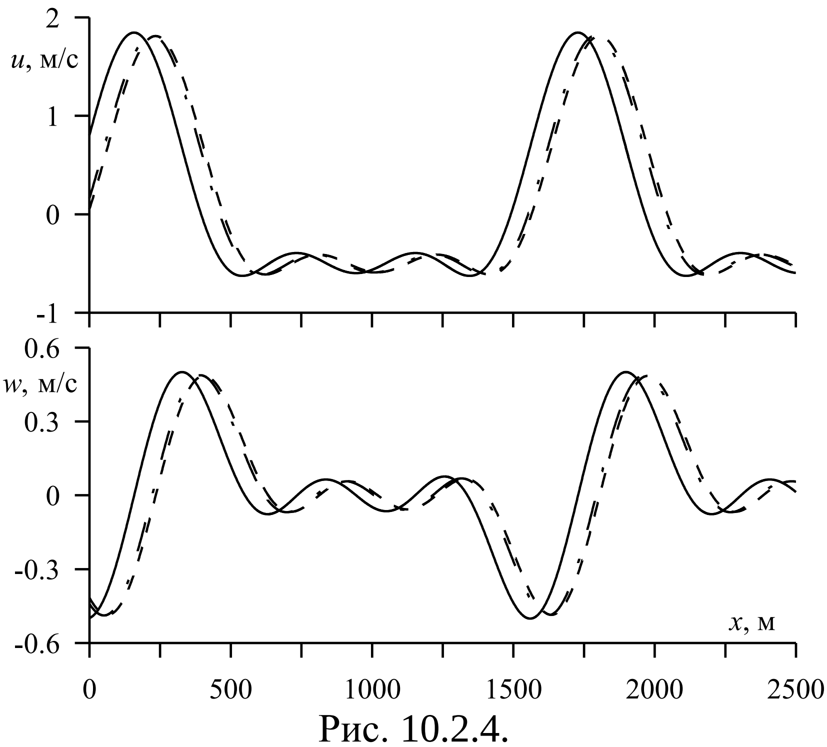

Рис. 10.2.4.

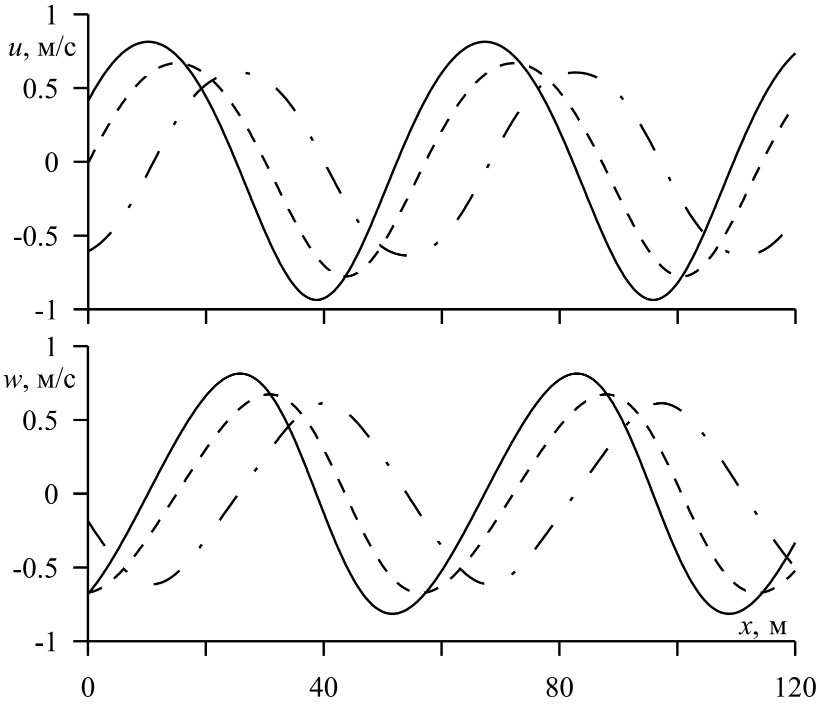

Рис. 10.2.5

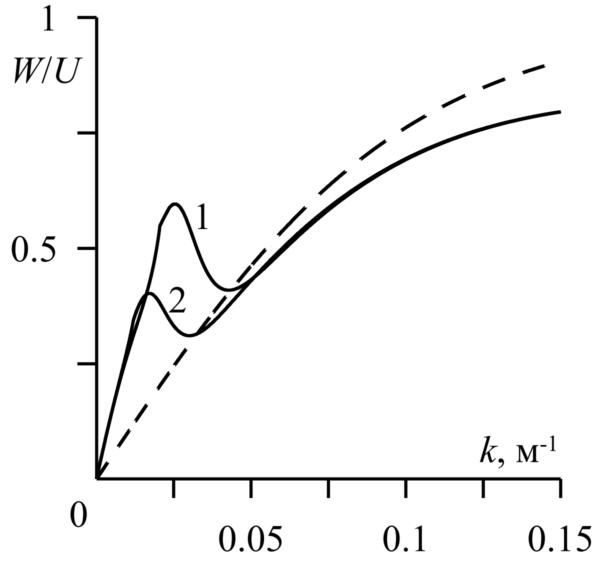

Рис. 10.2.6.

10.3. Влияние продольного ледового сжатия на составляющие скорости движения жидкости

При учете ледового сжатия потенциал скорости движения жидкости определяется по формуле (10.1.1) с той разницей, что выражения τ^2, μ_2, μ_3, ν_3 принимают вид

$$\tau^2 = \left(1 - Q_1 k^2 + D_1 k^4\right)\left(1 + \kappa k \,\mathrm{th} H\right)^{-1} \mathrm{th} H,$$

$$\nu_2 = \tau^2 \left(5\,\mathrm{th} H - \mathrm{cth} H + 2\kappa k\right) - 2\left(1 - 4 Q_1 k^2 + 16 D_1 k^4\right),$$

$$\mu_2 = \left(1 - 4Q_1k^2 + 16D_1k^4\right)\mathrm{th}2H - 2\tau^2\left(1 + 2\kappa k\,\mathrm{th}H\right),$$
$$\nu_3 = 3\tau^2 l_1 - l_2\left(1 - 9Q_1k^2 + 81D_1k^4\right),$$
$$\mu_3 = \left(1 - 9Q_1k^2 + 81k^4\right)\mathrm{th}3H - 3\tau^2\left(1 + 3\kappa k\,\mathrm{th}3H\right),$$

где $Q_1 = Q/\rho g$, Q – усиление сжатия, а все другие обозначения остаются прежними.

В размерных величинах потенциал скорости φ и составляющие скорости $u = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, $w = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$ определяются по формулам (10.1.2), (10.1.3) с учетом выражений (10.2.1).

Для количественной оценки влияния ледового сжатия на величины составляющих скорости и их распределения вдоль профиля нелинейной волны проводились численные расчеты при условии $Q_1 < 2\sqrt{D_1}$, необходимом для устойчивости плавающей ледяной пластинки [20, 117] и значениях $\rho_1/\rho = 0.87$, $\nu = 0.34$, $0 < h \le 2$ м. Модуль нормальной упругости льда E принимался равным $3\cdot10^9$ Н/м^2. Волновое число при этом выбиралось соответствующим гравитационному ($k < k_1$) [74], обусловленному сжатием ($k_1 < k < k_2$) и изгибному ($k > k_2$) участкам дисперсионных кривых начальной гармоники [20], представленных на рис. 10.3.1 для $H = 50$ м, $h = 1.5$ м. Сплошной, штриховой и штрихпунктирной линиям соответствуют значения Q_1, равные 0; $\sqrt{D_1}$; $1.95\sqrt{D_1}$. Кружком и квадратом на оси k отмечены значения k_1 и k_2.

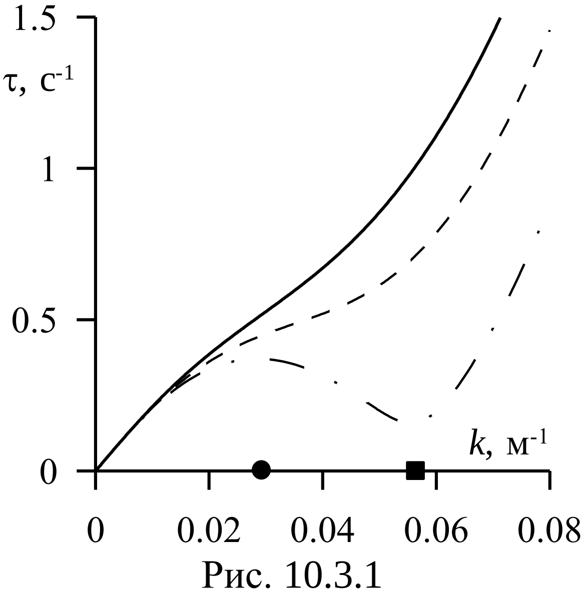

Рис. 10.3.1

Анализ результатов численных расчетов показал, что при фиксированных значениях волнового числа k увеличение сжимающего усилия приводит к уменьшению амплитудных значений составляющих скорости и отставанию фазы колебания. Это иллюстрируют представленные на рис. 10.3.2, 10.3.3, 10.3.4 распределения горизонтальной u и вертикальной w составляющих скорости вдоль профиля волны. Зависимости $u(x)$ и $w(x)$ на рис. 10.3.2, 10.3.3 даны при $a = 2$ м для $t = 1120$ с, $k = 5\cdot10^{-3}$ м$^{-1}$ (рис. 10.3.2) и $t = 300$ с, $k = 4.5\cdot10^{-2}$ м$^{-1}$ (рис. 10.3.3), а на рис. 10.3.4 – при $a = 1$ м, $t = 385$ с, $k = 7\cdot10^{-2}$ м$^{-1}$. Значения H и h полагались здесь теми же, что и для рис. 10.3.1 Отметим, что заданные значения k для рис. 10.3.2, 10.3.3, 10.3.4 удовлетворяют неравенствам $k < k_1$, $k_1 < k < k_2$, $k > k_2$ соответственно. Обозначения кривых на рис. 10.3.2, 10.3.3, 10.3.4 соответствуют обозначениям на рис. 10.3.1.

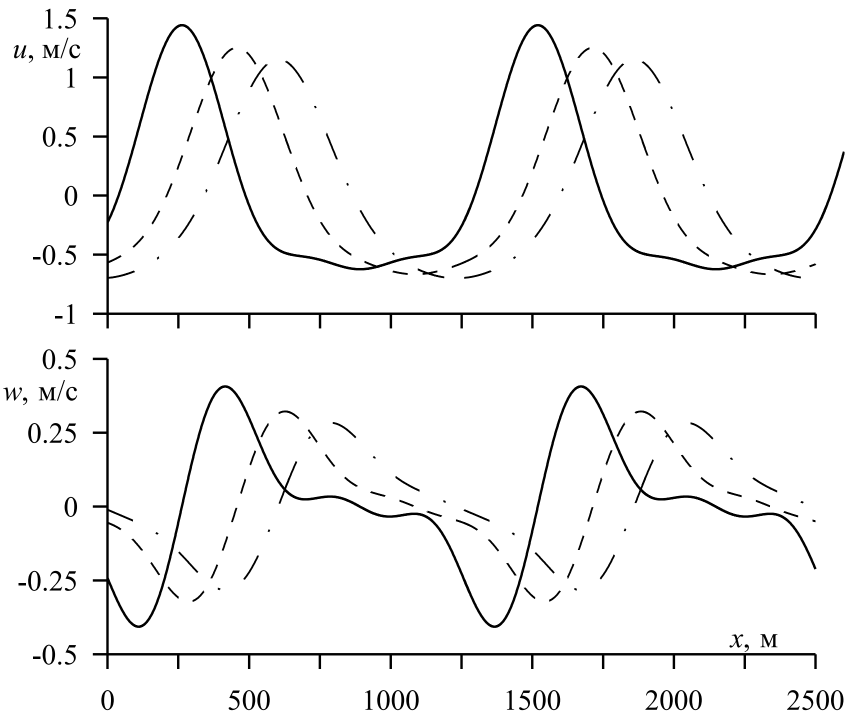

Рис. 10.3.2.

Приведенные на рис. 10.3.2, 10.3.3, 10.3.4 распределения составляющих скорости вдоль профиля волны свидетельствуют о том, что в условиях сжатия $(Q_1 \neq 0)$ [27], также как и при отсутствии сжимающего усилия [13], в точках максимальных (вершина) и минимальных (подошва) значений скорости на профиле $u(x)$ вертикальная составляющая равна нулю. Однако точкам максимума и минимума на профиле $w(x)$ соответствуют не нулевые величины горизонтальной составляющей скорости.

Количественную зависимость изменений максимальных значений составляющих скорости в вершинах (U_1, W_1) и впадинах (U_2, W_2) их профилей от длины волны показывают данные, приведенные в таблице 10.3.1 при $a = 2$ м для тех же значений E, H, h, что и на рис. 10.3.1.

Здесь же даны и соответствующие значения фазовой скорости $(V_{фаз})$ и периода волны $(2\pi/\sigma)$.

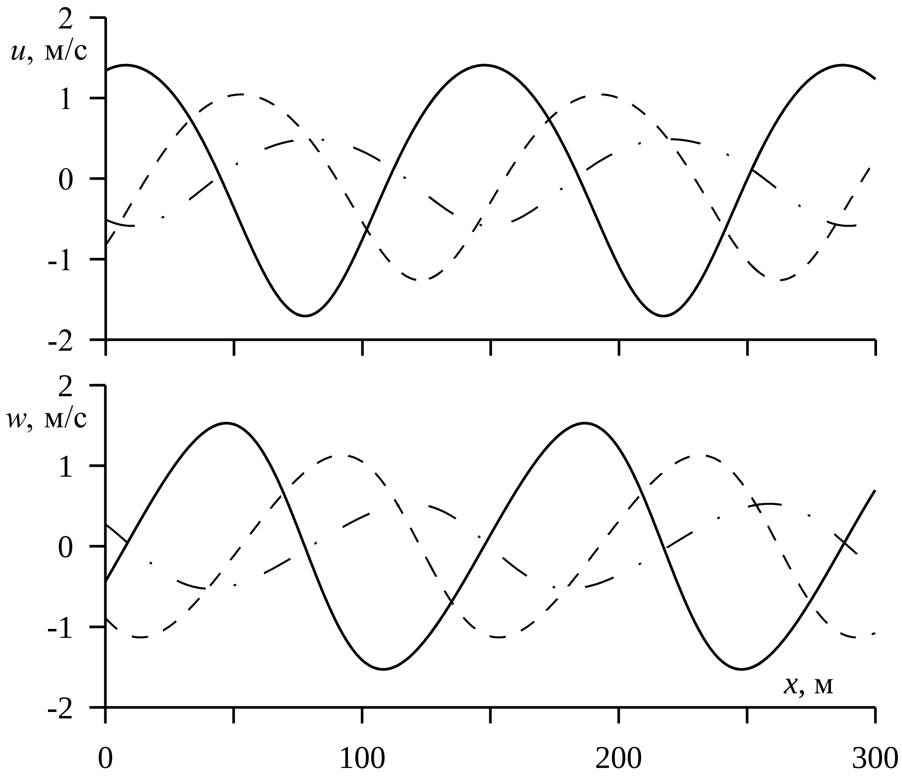

Рис. 10.3.3.

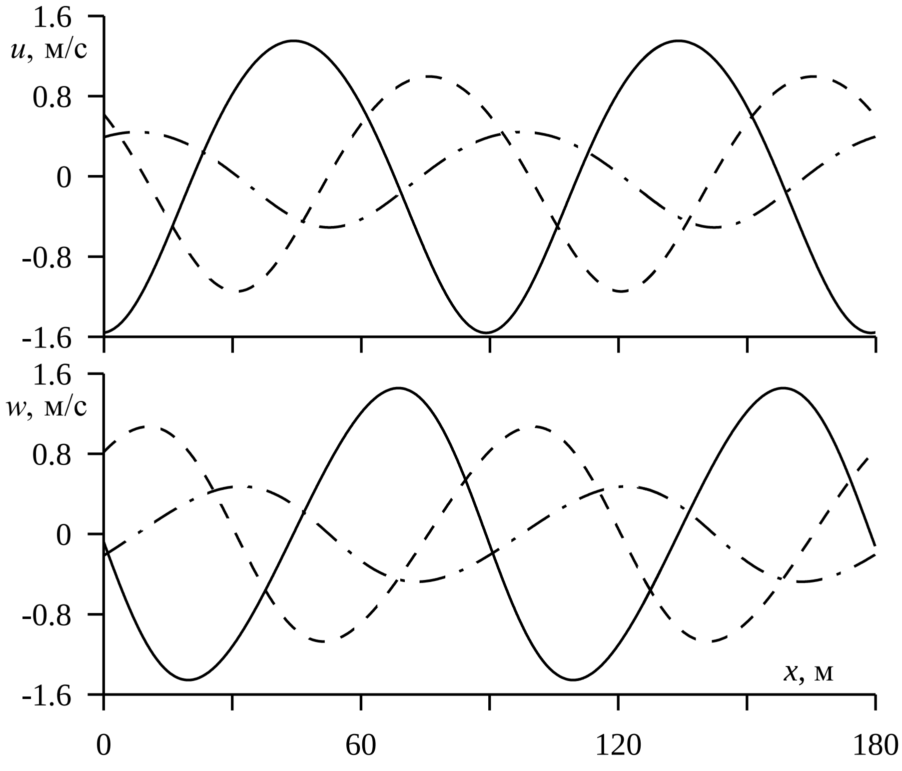

Рис.10.3.4.

Таблица 10.3.1.

Влияние ледового сжатия на характеристики нелинейной волны

k, м$^{-1}$	λ, м	Q_1, Н/м^2	$V_{фаз}$, м/с	$2\pi/\sigma$, с	U_1, м/с	U_2, м/с	W_1, м/с	W_2, м/с
0.005	1256.00	0	22.21	56.56	1.44	-0.62	0.41	-0.41
		$\sqrt{D}$	22.03	57.01	1.25	-0.67	0.32	-0.32
		$1.95\sqrt{D}$	21.90	57.35	1.15	-0.70	0.28	-0.28
0.02	314.00	0	19.31	16.26	1.06	-1.00	0.76	-0.76
		$\sqrt{D}$	18.06	17.38	0.94	-0.95	0.72	-0.72
		$1.95\sqrt{D}$	16.81	18.68	0.87	-0.90	0.67	-0.67
0.04	157.00	0	16.71	9.40	1.28	-1.52	1.35	-1.35
		$\sqrt{D}$	12.95	12.13	0.99	-1.18	1.05	-1.05
		$1.95\sqrt{D}$	7.85	20.00	0.60	-0.72	0.64	-0.64
0.045	139.56	0	16.73	8.34	1.41	-1.71	1.53	-1.53
		$\sqrt{D}$	12.39	11.26	1.04	-1.26	1.13	-1.13
		$1.95\sqrt{D}$	5.78	24.13	0.49	-0.59	0.53	-0.53
0.047	133.62	0	16.81	7.95	1.47	-1.79	1.60	-1.60
		$\sqrt{D}$	12.27	10.89	1.07	-1.30	1.17	-1.17
		$1.95\sqrt{D}$	5.01	26.65	0.44	-0.53	0.48	-0.48

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. – М. Высшая школа, 1990. – 399 с.
2. Алешков Ю.З. Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. – Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1981. – 196 с.
3. Алешков Ю.З. Течения и волны в океане. - СПб.: Изд-во С – Петербургского ун-та, 1996. – 228 с.
4. Атлас льдов Черного и Азовского морей / Под ред. Назарова С.Л.: Гидрометеоиздат, 1962. – 120 с.
5. Бабешко В.А. Об условиях излучения для упругого слоя // Докл. АН СССР, 1973, т. 213, №3. – С. 547 – 549.
6. Беляев В.П. Режим ветра и ветрового волнения на Азовском море // Тр. ГОИН. – 1978. – Вып. 139. – С. 21 – 28.
7. Бернар Ле Меоте Введение в гидродинамику и теорию волн на воде. – Л.: Гидрометеоиздат, 1974, – 368 с.
8. Богородский В.В., Гаврило В.П. Лед. Физические свойства. Современные методы и гляциология. – Л: Гидрометеоиздат, 1980. – 384 с.
9. Боровская Р.В., Ломакин П.Д. Особенности ледовых условий в Азовском море и Керченском проливе в зимний сезон 2005/06 г. // Метеорология и гидрология. – 2008. №7. – С. 67 – 72.
10. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. – М.: Наука, 1973. – 343 с.
11. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред. В приложении к теории волн. – М.: Наука, 1982. – 335 с.
12. Буйвол В.Н. Колебания и устойчивость деформируемых систем в жидкости. – Киев: Наук. думка, 1975, – 190 с.
13. Букатов Ант.А., Букатов Анд.А. Скорости движения жидких частиц под плавающим ледяным покровом при распространении периодических волн конечной амплитуды // Морской гидрофизический журнал. 2011, №1. – С. 15 – 24.
14. Букатов А.А., Доценко С.Ф. Генерация длинных волн в бассейне переменной глубины при образовании аномалии атмосферного давления // Морской гидрофизический журнал, 1999, №1. – С. 3 – 11.
15. Букатов А.Е. О влиянии ледяного покрова на неустановившиеся волны // Морские гидрофизические исследования. – 1970. – №3(49). – С. 64 – 77.

16. Букатов А.Е. О влиянии ледяного покрова на внутренние волны // Морск. гидрофиз. исслед., 1972, №1(57). – С. 53 – 64.
17. Букатов А.Е. Влияние ледяного покрова на неустановившиеся волны в потоке конечной глубины // Морск. гидрофиз. исслед., 1975, №3(70). – С. 66 – 75.
18. Букатов А.Е. Влияние скорости потока на неустановившиеся волны в неоднородном море, покрытом льдом // Морск. гидрофиз. исслед., 1977, №2. – С. 15 – 26.
19. Букатов А.Е. Влияние продольно сжатой упругой пластинки на неустановившиеся движения однородной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1980. – №5. – С.68 – 75.
20. Букатов А.Е. Влияние продольного сжатия на неустановившиеся колебания упругой пластинки, плавающей на поверхности жидкости // Прикладная механика. – 1981. – 17, №1. – С. 93 – 98.
21. Букатов А.Е. Нелинейное взаимодействие поверхностных волн в бассейне с битым льдом // Изв. РАН, МЖГ. 1994. №4. – С. 136 – 143.
22. Букатов А.Е., Букатов А.А. Волны конечной амплитуды в однородной жидкости с плавающей упругой пластинкой // Прикладная механика и техническая физика. 2009. Т. 50. №5. – С. 67 – 74.
23. Букатов А.Е., Букатов А.А. Перенос массы нелинейной волной в бассейне с плавающим битым льдом // Морской гидрофизический журнал, 1998, №5. – С. 12 – 16.
24. Букатов А.Е., Букатов А.А. Перенос массы при нелинейном взаимодействии поверхностных волн в бассейне с плавающим битым льдом // Морской гидрофизический журнал, 2001, №2. – С. 3 – 10.
25. Букатов А.Е., Букатов А.А. Нелинейные поверхностные волны в бассейне с плавающим битым льдом. // Морской гидрофизический журнал, 2002, №5. – С. 34 – 47.
26. Букатов А.Е., Букатова О.М. Поверхностные волны конечной амплитуды в бассейне с битым льдом // Изв. РАН, ФАО, 1993, т. 29, №3. – С. 421 – 425.
27. Букатов А.А., Букатова О.М. Влияние ледового сжатия на составляющие скорости движения жидкости под ледяным покровом в бегущей периодической изгибно-гравитационной волне конечной амплитуды //Морской гидрофизический журнал. – 2011. № 4. – С. 28 – 35.
28. Букатов А.Е., Жарков В.В. Влияние битого льда на распространение поверхностных волн над уступом дна // Изв. РАН, МЖГ. 1998. №6. – С. 106 – 115.

29. Букатов А.Е., Жарков В.В. Влияние битого льда на скорость волновых течений при прохождении прогрессивных волн над уступом дна // Морской гидрофизический журнал. 2001, №5. – С. 3 – 14.
30. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д. Оценка экранирующей и пропускной способностей кромки льда при распространении поверхностных волн к берегу Северо-Западной части Черного моря // Океанология, 1996, т. 36, №2. – С. 226 – 230.
31. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д. Набегание поверхностных волн на кромку сжатого льда // Изв. РАН Механика жидкости и газа, 1995, № 3. – С. 121 – 126.
32. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д. Влияние трещины в плавающей упругой пластинке на распространение изгибно-гравитационных волн // Прикладная механика и техническая физика, 1995, т. 36, № 4. – С. 170 –175.
33. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д. Некоторые особенности распространения изгибно-гравитационных волн при наличии разлома в ледяном покрове // Изв. РАН. Механика жидкости и газа, 1990, № 2. – С. 144 –150.
34. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д. Трансформация ветровых волн ледяным покровом в северо-западной части Черного моря // Метеорология и гидрология, 1966, № 3. – С. 83 – 93.
35. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д. Набегание изгибно-гравитационных волн на линию контакта двух плавающих ледяных пластин разной толщины // Морской гидрофизический журнал, 1998, № 1. – С. 11 – 17.
36. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д., Жарков В.В. Трансформация ветровых волн при выходе на мелководье // Морской гидрофизический журнал, 2000, № 2. – С. 3 – 11.
37. Букатов А.Е., Соломаха Т.А. Влияние вязкоупругих свойств льда на трехмерные поверхностные волны // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана, 1995, т. 31, №6. – С. 852 – 857.
38. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Влияние ледяного покрова на волновые движения // Морск. гидрофиз. исслед., 1971, №2(52). – С. 113 – 144.
39. Ветер и волны в океанах и морях. Справочные данные. – Л.: Транспорт, 1974. – 359 с.
40. Витюк В.Ф. Дифракция поверхностных волн на доке конечной ширины // Прикладная математика и механика, 1970, т. 34. – С. 32 – 40.
41. Войт С.С. Длинные волны и приливы. – В кн.: Океанология. – М.: Изд-во ВИНИТИ, 1975, т. 3, – С. 70 – 90.
42. Вольцингер Н.Е., Пясковский Р.В. Теория мелкой воды. – Л.: Гидрометеоиздат, 1977. – 208 с.

43. Вольцингер Н.Е., Клеваный К.А., Пелиновский Е.Н. Длинноволновая динамика прибрежной зоны. - Л: Гидрометеоиздат, 1989. – 271 с.
44. Галеркин Б.Г. Упругие тонкие плиты. – Госстройиздат, 1933. – 273 с.
45. Гидрометеорология и гидрохимия морей СССР / Под ред. Симонова А.И., Альтмана Э.Н. Л.: Гидрометеоиздат, 1991, т. 4, вып. 1. – 430 с.
46. Гладун О.М., Федосенко В.С. Нелинейные установившиеся колебания упругой пластины, плавающей на поверхности жидкости конечной глубины. // Изв. АН СССР, 1989, №3. – С. 146 – 154.
47. Гольдштейн Р.В., Марченко А.В. О длинных волнах в системе ледяной покров – жидкость при наличии ледового сжатия // Электрофизические и физико-механические свойства льда: Сб. научн. Тр. Л.: Гидрометеоиздат. 1989. – С. 188 – 205.
48. Григолюк Э.И., Горшков Л.Г. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью. – Л.: Судостроение, 1976. – 200 с.
49. Давидан И.Н., Лопатухин Л.И., Рожков В.А. Ветровое волнение как вероятностный гидродинамический процесс. – Л: Гидрометеоиздат, 1978. – 287с.
50. Доронин Ю.П., Хейсин Д.Е. Морской лед. // Гидрометеоиздат. Л.: Гидрометеоиздат, 1975. – 318 с.
51. Доценко С.Ф., Черкесов Л.В. Неустановившиеся колебания плавающей пластинки, вызванные движущейся нагрузкой // Прикл. механика, 1977, т. 13, №3. – С. 98 – 103.
52. Дудчик М.К. Особенности ледовых условий на Черном и Азовском морях зимой 1962-1963 г. – Сб. работ бассейновой гидрометеорологической обсерватории Черного и Азовского морей. – Л.: Гидрометеоиздат, 1965. – С. 60 – 71.
53. Думанская И.О. Ледовые условия морей европейской части России. – М.; Обнинск: ИГ – СОЦИН, 2014. – 608 с.
54. Дьяков Н.Н., Тимошенко Т.Ю., Белогубов А.А., Горбач С.Б. Атлас льдов Черного и Азовского морей. // Севастополь: ООО «НПЦ «Экоси-гидрофизика», 2015. – 219 с.
55. Ефимов В.В. Динамика волновых процессов в пограничных слоях атмосферы и океана. – Киев: Наук. думка, 1981. – 253 с.
56. Ефимов В.В., Кривинский Б.Б., Соловьев Ю.П. Изучение зависимости энергии морских ветровых волн от разгона // Метеорология и гидрология, 1986, №11. – С. 68 – 75.

57. Ефимов В.В., Соловьев Ю.П. Дисперсионное соотношение и частотно-угловые спектры ветровых волн // Изв. АН СССР, Сер.: ФАО. – 1979. – Т. 15. – №11. С. 1175 – 1187.
58. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
59. Иванов В.А., Янковский А.Я. Длинноволновые движения в Черном море. – Киев: Наук. думка, 1992. – 112 с.
60. Ильичев А.Т., Марченко А.В. О распространении длинных нелинейных волн в тяжелой жидкости под ледяным покровом // Изв. АН СССР. МЖГ, 1989, №1. – С. 88 – 96.
61. Каракаш А.И., Короб М.П. Долгосрочный прогноз ледовитости неарктических морей // Тр. ГМЦ, 1984. Вып. 263. – С. 81 – 90.
62. Козин В.М., Жесткая В.Д., Погорелова А.В., Чижиумов С.Д., Джабраилов М.Р., Морозов В.С., Кустов А.Н. Прикладные задачи динамики ледяного покрова. – М.: Академия Естествознания, 2008. – 329 с.
63. Кононкова Г.Е., Показеев К.В. Динамика морских волн. – М.: Изд-во Московского ун-та. – 1985. – 298 с.
64. Копачевский Н.Д. О колебаниях капиллярной вязкой вращающейся жидкости // Докл. АН СССР. – 1974. – 219, № 5. – С. 1065 – 1068.
65. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. В 2-х т. – М.: Гос. изд-во техн. – теорет. лит., 1955, т. 1. – 560 с.
66. Красильников В.Н. О возбуждении изгибно-гравитационных волн // Акустический журнал, 1962, т. 8, №1. – С. 133 – 136.
67. Красильников В.Н. Рассеяние изгибных волн на неоднородностях упругой пластины // Акустический журнал, 1962. Т. 2, вып. 8. – С. 183 – 188.
68. Красильников В.Н. О решении некоторых гранично-контактных задач линейной гидродинамики // Прикладная математика и механика, 1967, т.XXV, вып. 4. С. 764 – 768.
69. Крылов Ю.М. Распространение длинных волн под ледяным полем // Тр. ГОИН. 1948. №8. – С.52 – 59.
70. Крылов Ю.М. Спектральные методы исследования и расчета ветровых волн. – Л.: Гидрометеоиздат, 1966. – 255 с.
71. Крылов Ю.М., Стрекалов С.С., Цыплухин В.Ф. Ветровые волны и их воздействие на сооружения. – Л.: Гидрометеоиздат. 1976. – 256 с.
72. Крындини А.Н. Сезонные и межгодовые изменения ледовитости и подожения кромки льда на Черном и Азовском морях в связи с осо-

бенностями атмосферной циркуляции // Тр. ГОИН, 1964, вып. 76. – С. 7 – 79.
73. Куцуруба А.И. Статистические характеристики сроков очищения ото льда и скорости таяния льда в Азовском море // Тр. Гидрометцентра СССР, 1984, вып. 263. – С. 101–105.
74. Лайтхилл Д. Волны в жидкостях. – М.: Мир, 1981. – 600 с.
75. Лакомб А. Физическая океанография. – М: Мир, 1974. – 496 с.
76. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. Ч. 1. – М.: Мир, 1981. – 480 с.
77. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. Ч. 2. – М.: Мир, 1981. – 365 с.
78. Луговский В.В. Динамика моря. – Л.: Судостроение, 1976. – 199 с.
79. Луковский И.А. Нелинейные колебания жидкости в сосудах сложной геометрической формы. – Киев: Наук. думка, 1975. – 136 с.
80. Марченко А.В. Дифракция поверхностных волн на трещине в ледяном покрове // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 1993. № 2. – С. 93 – 102.
81. Марчук Г.И., Кузнецов Ю.А. Итерационные методы и квадратичные функционалы. – Новосибирск: Наука, 1972. – 205 с.
82. Матишов Г.Г., Матишов Д.Г., Гаргопа Ю.М., Дашкевич Л.В. Замерзание Азовского моря и климат в начале XXI века // Наука юга России. Изд.: Южный научный центр РАН (Ростов-на-Дону). – 2010. Т.6. №1. – С. 33 – 40.
83. Матушевский Г.В., Кабатченко И.М. Модели ветровых волн в прибрежной зоне – состояние проблемы и предлагаемое решение // Изв. РАН. Сер: ФАО. – 1998. – Т. 34, №3. – С. 422 – 429.
84. Монин А.С., Каменкович В.М., Корт В.Г. Изменчивость Мирового океана. – Л.: Гидрометеоиздат, 1974. – 264 с.
85. Найфе Л.Х. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 455 с.
86. Нестеров С.В. Возбуждение волн конечной амплитуды бегущей системой давлений // Изв. АН СССР, ФАО, 1968, т. 4, №10. – С. 1123 – 1125.
87. Ньюмен Дж. Морская гидродинамика. – Л.: Судостроение, 1985. – 386 с.
88. Овсянников Л.В., Макаренко Н.И., Налимов В.И. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. – Новосибирск: Наука, 1985. – 318 с.
89. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. – М.: Мир, 1991. – 365 с.
90. Паундер Э. Физика льда. – М: Мир, 1967. – 190 с.

91. Потетюнко Э.Н. Волновые движения жидкости со свободными границами. – Ростов-на-Дону: Ростовское отделение Всесоюз. общ. информац. и выч. техники, 1993. – 318 с.
92. Ржеплинский Г.В., Крылов Ю.М., Мотушевский Г.В., Стрекалов С.С., Назаретский Л.Н. Новый метод анализа и расчета элементов ветровых волн // Тр. ГОИН, 1968. – Вып. 93. – С. 5 – 52.
93. Роботнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – 744 с.
94. Савченко В.Г. О влиянии ледяного покрова на поверхностные и внутренние волны // Проблемы Арктики и Антарктики. 1986, вып. 62. – С. 103 – 110.
95. Секерж-Зенкович Я.И. О некоторых результатах гидродинамической теории волн конечной амплитуды. – В кн.: Физика моря и океана. – М.: Наука, 1971. – С. 137 – 146.
96. Селезов И.Т. Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах. – Киев: Наук. думка, 1989. – 204 с.
97. Селезов И.Т., Сидорчук В.Н., Яковлев В.В. Трансформация волн в прибрежной зоне шельфа. – Киев: Наук. думка, 1982. – 208 с.
98. Синюрин Ю.Н. Торосистать плавающего льда в открытых частях Азовского моря // Метеорология и гидрология, 1978. – С. 99 – 103.
99. Смирнов В.Н. Динамические процессы в морских льдах. – Л.: Гидрометеоиздат, 1996. – 162 с.
100. Смирнов В.Н., Линьков Е.М. Сейсмические и наклономерные методы исследования ледяного покрова // Тр. ААНИИ, 1975, т.326. – С. 137 – 142.
101. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М.Абрамовица, И.Стиган. М.: Наука, 1979. – 830 с.
102. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. – М: Наука, 1977. – 816 с.
103. Сретенский Л.Н. Динамическая теория приливов. – М: Наука, 1987. – 472 с.
104. Стокер Д.Д. Волны на воде. – М.: Изд-во иностр. лит., 1959. – 620 с.
105. Стурова И.В., Коробкин А.А. Плоская задача о воздействии периодической нагрузки на упругую пластину, плавающую на поверхности бесконечно глубокой жидкости. // Прикладная механика и техническая физика, 2005. т. 46 №3(271). – С. 61 – 72.

106. Суворов А.М. Развитие колебаний ледяного покрова в море при наличии горизонтального течения со сдвигом скорости // В кн.: Поверхностные и внутренние волны. – Севастополь: Из-во МГИ АН УССР, 1979. – С. 63 – 69.
107. Суворов А.М., Черкесов Л.В. Нестационарные вынужденные колебания упругой пластинки, плавающей на поверхности потока со сдвигом скорости // Прикл. механика, 1978, т. 15, №6. – С. 103 – 107.
108. Сытинский А.Д., Трипольников В.П. Результаты исследования естественных колебаний ледяных полей Центральной Арктики // Изв. АН СССР. Сер.геофизика, 1964, 34. – С. 615 – 621.
109. Тимохов Л.А., Хейсин Д.Е. Динамика морских льдов (математические модели). – Л: Гидрометеоиздат, 1987. – 272 с.
110. Тютнев Я.А. О тяжелых ледовых условиях на Черном, Азовском и Каспийскос морях зимой 1971/1972 г. // Тр. ГМЦ, 1975, вып. 119. – С. 47 – 53.
111. Тютнев Я.А. Расчет и прогноз ледовых явлений в некоторых портах Азовского и Черного морей // Тр. ЦИП, 1966, вып. 156. – С.99 – 107.
112. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 622 с.
113. Филлипс О.М. Динамика верхнего слоя океана. – Л.: Гидрометеоиздат, 1980. – 319 с.
114. Фукс В.Р. Введение в теорию волновых движений в океане. – Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1982. – 200 с.
115. Хейгеман Л.ЯнгД. Прикладные итерационные методы. – М.: Мир, 1986. – 446 с.
116. Хейсин Д.Е. Нестационарная задача о колебаниях бесконечной пластины, плавающей на поверхности идеальной жидкости // Изв. АН СССР, Мех. и машиностр., 1962, №1. – С. 163 – 167.
117. Хейсин Д.Е. Динамика ледяного покрова. – Л.: Гидрометеоиздат, 1967. – 215 с.
118. Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1972. – 400 с.
119. Черкесов Л.В. Поверхностные и внутренние волны. – Киев: Наук. думка, 1973. – 248 с.
120. Черкесов Л.В. Гидродинамика поверхностных и внутренних волн. – Киев: Наук. думка, 1976. – 364 с.
121. Черкесов Л.В. Гидродинамика волн. – Киев: Наук. думка, 1980. – 260 с.

122. Черкесов Л.В., Букатов А.Е., Суворов А.М. и др. Поверхностные и внутренние гравитационные волны в океане. – Киев: Наук. думка, 1989. – 144 с.
123. Черкесов Л.В., Иванов В.А., Хартиев С.М. Введение в гидродинамику и теорию волн. – Л.: Гидрометеоиздат, 1992. – 264 с.
124. Чернякова А.П. Типовые поля ветра Черного моря // Сб. работ бассейновой гидрометеорологической обсерватории Черного и Азовского морей. – Л.: Гидрометеоиздат, 1965. – С. 78 – 121.
125. Шулейкин В.В. Физика моря. – М.: Наука, 1968. – 1083 с.
126. Bates H.F., Shapiro L.H. Long-period gravity waves in ice-covered sea // J. Geophys. Res., 1980, Vol. 85, №С2. – P. 1095 – 1100.
127. Bouws E., Gunther H., Rosenthal W., Vincent C. Similarity of the wind wave spectrum in finite depth water // J. Geophys. Res. – 1985. – Vol. 90. – C. 1. P. 975 – 986.
128. Bukatov A.A., Bukatov A.E., Zharkov V.V., Zav'yalov D.D. Features of the wave dynamics in ice-covered sea areas // First Ukrainian Antarctic Meeting. – Kyiv, 2001. Abstracts. – P. 12.
129. Bukatov A.E., Bukatov A.A. The broken ice effect on the propagation of surface waves of finite amplitude // EGS. Annales Geophysicae, Part II, 1998. – Supplement II to Vol. 16. – P. C578.
130. Bukatov A.E., Bukatov A.A. Propagation of surface waves of finite amplitude in a basin with floating broken ice // International Journal of Offshore and Polar Engineering, 1999, Vol. 9, №3. – P. 161 – 166.
131. Bukatov A.E., Bukatov A.A. Effect of the Floating Broken Ice on the Interaction of Surface Waves of Finite Amplitude // Сб. научных трудов: Системы контроля окружающей среды. Севастополь: МГИ НАН Украины, 2002. – С. 396 – 405.
132. Bukatov A.E., Bukatov A.A., Zharkov V.V. Surface Waves in Fluid with Floating Broken Ice // International Conference "Stability and Instabilities of Stratified and/or Rotating Flows". – Moscow, 1997. Abstracts. – P. 21 – 22.
133. Bukatov A.E., Bukatov A.A., Zharkov V.V. Influence of the broken ice on the propagation of surface waves // Joint Assemblies of IAPSO & IAMAS. – Melbourne, 1997. Book of Abstracts. P. IP16 – 2.
134. Carrier G.F. Gravity waves on water of variable depth // J. of Fluid Mechanics., 1966, Vol. 24, №4. – P. 641 – 659.

135. Davis J.w., Hosking R.J., Sneyd A.D. Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate // J/ Fluid Mech., 1985, Vol. 158. – P. 269 – 287.
136. Duffy D.G. The Response of floating ice to a moving, vibrating load // Cold Reg. Sci. and Tech., 1991, Vol. 20. – P. 51 – 64.
137. Evans D.V., Davies T.K. Wave ice – interaction. Rep. 1313, Davidson lab., Stevens Inst. Of Technol., Hoboken, N.J., 1968.
138. Fox C., Squire V.A. Reflexion and transmission characteristics at the edge of chore fast sea ice // J. Geophys. Res., 1990, Vol. 95, №C7. – P. 11629 – 11639.
139. Fox C., Squire V.A. Stain in Sh0re Fast Ice due to incoming ocean Waves and swell // J. Geoph. Res., 1991. №3. – P. 4531 – 4547.
140. Goda Y. Irregular wave deformation in the surf zone // Coast. Eng. Japan. – 1975. – V. 18. – P. 13 – 26.
141. Goda Y. and Nagai K. Investigation of the statistical properties of sea waves with field and similar data // Report of the Port and Harbour Research Institute. 1974. Vol. 13. – P. 3 – 37.
142. Goodman D.J., P. Wadhams, Squire V.A. The flexural response of a tabular ice island to ocean swell // Ann. Glacial, 1980, Vol. 1. – P. 23 – 27.
143. Hunkins K. Waves in the Arctic Ocean // J. Geophys. Res., 1962, Vol. 67, №6. – P. 2477 – 2489.
144. Keller J.B., Goldstein E. Water wave reflection due to surface tension and floating ice // Trans. Am. Geophys. Union, 1953, №34. – P. 43 – 48.
145. Keller J.B., Weitz M. Reflection and transmission coefficients for waves entering or leaving an icefield // Comm. Pure and Appl. Math., 1953. – P. 415 – 417.
146. Kitaigorodskii S.A., Krasitskii V.P., Zaslavskii M.M. On Phillips' theory of equilibrium range in the spectra of wind-generated gravity waves // J. Phys. Oceanogr. – 1975. – Vol. 5. – P. 410 – 420.
147. Liu A.K., Hakkinen S., Peng C.Y. Wave effects on ocean-ice interaction in the marginalice zone // J. Geoph. Res., 1993, Vol. 98, NO. C6. – P. 10025 – 10036.
148. Longuet-Higgins M.S. Lagrangian moments and mass transport in Stokes Waves // J. of Fluid Mechanics., 1987, Vol. 179. – P. 547 – 555.
149. Longuet-Higgins M.S. Lagrangian moments and mass transport in Stokes waves. – Part 2. Water of finite depth // J. of Fluid Mechanics., 1988, Vol. 186. – P. 321 – 336.

150. Munk W.N. The solitary wave theory and its application to surf problems // Ann. Of the New York Academy of Sciences. 1949, Vol. 51. – P. 376 – 422.
151. Murty T.S., Polavarapu R.J. Influence of an ice layer on the propagation of long waves // Marine Geodesy, 1979, Vol. 2, №2. – P. 99 – 125.
152. Nayfey A.H. Finite amplitude surface waves in a liquid layer // J. Fluid Mech., 1970, Vol. 40, №4. – P. 671 – 684.
153. Newman J.N. Propagation of waver waves over an infinite step // J. Fluid Mech. 1965. Vol. 23. Pt. 2. – P. 399 – 415.
154. Peters A.S. The effect of a floating mat on water waves // Comm. Pure Appl. Math., 1950, Vol. 3, №4. – P. 319 – 354.
155. Robin G. de Q. Ocean waves and pack ice // Polar Records, 1963, Vol. 11, №73. – P. 389 – 393.
156. Robin G. de Q Waves propagation through fields of pack ice // Phil. Trans. Roy. Sos. Ser. A., 1963, Vol. 225, №1057. – P. 313 – 339.
157. Schulkes R.M.S.M., Sneyd A.D. Time-dependent response of floating ice to a steatily moving load // J. Fluid Mech. 1988. Vol. 186. – P. 25 – 46.
158. Squire V.A. A Theoretical, laboratory and field study of ice-coupled waves // J. Geophys. Res., 1984, Vol. 89, №C5. – P. 8069 – 8079.
159. Squire V.A, Hosking R.J., Kerr A.D., Langhorne P.J. Moving loads on ice plates. Dordrecht: Kluwer, 1996. – 230 p.
160. Stokes G.G. On the theory of oscillatory waves // Mathematical and physical papers. Cambridge University Press, 1847, Vol. 1, – P. 197 – 229.
161. Stone P.H. The meridional structure of baroclinic waves // J. Atmos. Sci., 1969, Vol. 26, – P. 375 – 389.
162. Wadhams P. The effect of a sea ice cover in ocean surface waves. A dissertation submitted for the degree of Doctor of Philosophy in the University of Cambridge // Cambridge, 1973. – 416 p.
163. Wadhams P. Attenuation of swell by sea ice // J. Goephys. Res., 1973, Vol. 78, №18. – P. 3552 – 3563.
164. Wadhams P. The seasonal ice zone // The Geophysical of sea ice: Proc NATO ASI Series. Series B: Physics, 1986, vol 146. – P. 825 – 991.
165. Weitz M., Keller J.B. Reflection of water waves from floating ice in water of finite depth // Comm. Pure Appl. Math., 1950, Vol. 3, №3. – P. 305 – 318.
166. Wen S.C., Guo P.F., Zhang D.C., Bohai C. Theoretical wind wave frequency in shallow waver // Acta Oceanologica Sinica. – 1988. – Vol. 7. – P. 325 – 343.

167. Wen S.C., Guo P.F., Zhang D.C., Bohai C. Parameters in wind-wave frequency spectra and their bearings on spectrum form’s and growth // Acta Oceanologica Sinica. – 1989. – Vol. 8. – P. 15 – 39.
168. Wilson W.B. Numerical prediction of ocean waves in the North Atlantic for December. 1959. // Deut Hydr. Zeit., 1965. Vol. 18. – P. 114 – 130.
169. Yoside Z., Huzioka T. Same studies on the mechanical properties of snow // Assembles Generale de Pome, 1954, №4 – P. 98 – 105.
170. Young I.R. The growth of finite depth wind-generated waves // Coastal Engineering, 1997. – Vol. 32. – P. 181 – 195.

ИЗБРАННЫЕ НАУЧНЫЕ ТРУДЫ
доктора физико-математических наук, профессора
Букатова Алексея Евтихиевича

1. Букатов А.Е. О влиянии на внутренние волны упругой пластины, плавающей на свободной поверхности жидкости // Морские гидрофизические исследования, 1969, № 1. – С. 185 – 192.
2. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Неустановившиеся колебания ледяного покрова, вызываемые периодическими перемещающимися давлениями // Морские гидрофизические исследования, 1969, № 2. – С. 94 – 105.
3. Букатов А.Е. О влиянии ледяного покрова на неустановившиеся волны // Морские гидрофизические исследования, 1970, № 3. – С. 64 – 77.
4. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. О внутренних волнах от периодических возмущений // Морские гидрофизические исследования, 1970, № 4. – С. 49 – 54.
5. Букатов А.Е. О внутренних гравитационных волнах в стратифицированной жидкости // Морские гидрофизические исследования, 1970, № 4. – С. 55 – 66.
6. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Неустановившиеся колебания упругой пластинки, плавающей на поверхности жидкости // Прикладная механика, 1970, т. 6, № 8. – С. 89 – 96.
7. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Волны в непрерывно стратифицированном море // Морские гидрофизические исследования, 1971, № 2. – С. 62 – 87.
8. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Влияние ледяного покрова на волновые движения // Морские гидрофизические исследования, 1971, № 2. – С. 113 – 144.
9. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Внутренние волны от периодических поверхностных возмущений // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1971, т. 7, № 6. – С. 648 – 657.
10. Букатов А.Е. О внутренних волнах в непрерывно стратифицированном океане // Морские гидрофизические исследования, 1971, № 6. – С. 26 – 36.
11. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Внутренние волны от барических возмущений в Средиземном море // В кн.: Советско-французские исследования. Взаимодействие океана и атмосферы. Севастополь: МГИ АН УССР, 1972. – С. 26 – 33.

12. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. О влиянии упругой пластинки на движение неоднородной жидкости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1972, № 1. – С. 60 – 67.
13. Букатов А.Е. О влиянии ледяного покрова на внутренние волны // Морские гидрофизические исследования, 1972, № 1. – С. 53 – 64.
14. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Влияние неоднородности жидкости на колебания тонкой упругой пластинки // Прикладная механика, 1972, т. 8, № 6. – С.111 – 117.
15. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Генерация внутренних волн придонными возмущениями // Морские гидрофизические исследования, 1973, № 1. – С. 43 – 53.
16. Букатов А.Е. К вопросу о внутренних волнах в непрерывно стратифицированном море // Морские гидрофизические исследования, 1973, № 3. – С. 42 – 52.
17. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Влияние ледяного покрова на внутренние волны, генерируемые атмосферными возмущениями в непрерывно стратифицированном море // Проблемы Арктики и Антарктики, 1974, вып. 43–44. – С. 106 – 111.
18. Букатов А.Е. Внутренние волны, генерируемые в море со слоем скачка плотности периодическими колебаниями участка дна // Морские гидрофизические исследования, 1974, № 1. – С. 44 – 52.
19. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Влияние глубинной стратификации на внутренние волны // Морские гидрофизические исследования, 1974, № 4. – С. 58 – 67.
20. Букатов А.Е. Влияние ледяного покрова на неустановившиеся волны в потоке конечной глубины // Морские гидрофизические исследования, 1975, № 3. – С. 66 – 75.
21. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. О влиянии скорости потока на развитие волн в море, покрытом льдом // Морские гидрофизические исследования, 1975, № 4. – С. 49 – 60.
22. Букатов А.Е. О влиянии горизонтальной диффузии плотности на внутренние волны // Морские гидрофизические исследования, 1975, № 4. – С. 61 – 67.
23. Букатов А.Е. Внутренние волны от начальных возмущений в море, покрытом льдом // В кн.: Цунами и внутренние волны. Севастополь: МГИ АН УССР, 1976. – С. 17 – 26.

24. Букатов А.Е. Гравитационно-упругие волны от начальных возмущений в потоке неоднородной жидкости // В кн.: Цунами и внутренние волны. Севастополь: МГИ АН УССР, 1976. – С. 131 – 143.
25. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Влияние ледяного покрова на развитие внутренних волн от периодических возмущений // Морские гидрофизические исследования, 1976, № 4. – С. 5 –16.
26. Букатов А.Е. Неустановившиеся капиллярно-гравитационные волны в неоднородной жидкости // Морские гидрофизические исследования, 1977, № 1. – С. 24 – 33.
27. Букатов А.Е. Влияние скорости потока на неустановившиеся волны в неоднородном море, покрытом льдом // Морские гидрофизические исследования, 1977, № 2. – С. 15 – 26.
28. Букатов А.Е. Влияние поверхностного натяжения на развитие волн от периодических возмущений в неоднородной жидкости // Морские гидрофизические исследования, 1977, № 3. – С. 32 – 43.
29. Букатов А.Е., Парамонов А.Н., Смирнов Г.В., Черкесов Л.В. Некоторые результаты анализа короткопериодных внутренних волн // Морские гидрофизические исследования, 1977, № 4. – С. 250 – 261.
30. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Неустановившиеся колебания упругой пластинки, плавающей на поверхности потока жидкости // Прикладная механика, 1977, т. 13, № 9. – С. 103 – 107.
31. Букатов А.Е., Мордашев В.И., Черкесов Л.В. Развитие капиллярно-гравитационных волн в двухслойной жидкости // Морские гидрофизические исследования, 1978, № 1. – С. 44 – 56.
32. Букатов А.Е. О влиянии вертикального изменения горизонтальной диффузии плотности на внутренние волны // Морские гидрофизические исследования, 1978, № 2. – С. 16 – 22.
33. Букатов А.Е., Мордашев В.И. Развитие капиллярно-гравитационных волн от периодических перемещающихся возмущений в неоднородной жидкости // Морские гидрофизические исследования, 1978, № 3. – С. 30 – 42.
34. Букатов А.Е. Влияние продольного растяжения на развитие изгибно-гравитационных волн в сплошном ледяном покрове // Морские гидрофизические исследования, 1978, № 4. – С. 26 – 33.
35. Букатов А.Е., Мордашев В.И. Влияние поверхностного натяжения на развитие волн от периодических возмущений в двухслойной жидкости // Морские гидрофизические исследования, 1978, № 4. – С. 34 – 44.

36. Букатов А.Е., Кушнир В.М., Смирнов Г.В., Суворов А.М., Черкесов Л.В. Внутренние волны приливного периода в экваториальной зоне Индийского океана // Океанология, 1978, т. 18, вып. 5. – С. 788 – 795.
37. Букатов А.Е. Влияние снежного покрова на изгибно-гравитационные волны в ледяных полях // В кн.: Поверхностные и внутренние волны. Севастополь: МГИ АН УССР, 1978. – С. 78 – 83.
38. Букатов А.Е., Букатова О.М. Волновое движение двухслойной жидкости в канале переменной глубины // В кн.: Поверхностные и внутренние волны, Севастополь: МГИ АН УССР, 1978. – С. 159 – 167.
39. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Неустановившиеся колебания дрейфующего в неоднородном море ледяного покрова, вызванные периодическими возмущениями // Тр. Аркт. и Антаркт. НИИ, 1979, т. 357. – С. 77 – 84.
40. Букатов А.Е. Влияние продольного растяжения на неустановившиеся колебания дрейфующего льда // В кн.: Поверхностные и внутренние волны. Севастополь: МГИ АН УССР, 1979. – С. 51 – 62.
41. Букатов А.Е., Мордашев В.И., Черкесов Л.В. Неустановившиеся капиллярно-гравитационные волны в двухслойной жидкости // В кн.: Поверхностные и внутренние волны. Севастополь: МГИ АН УССР, 1979. – С. 142 – 152.
42. Букатов А.Е., Букатова О.М. Влияние рельефа дна и распределения атмосферных возмущений на внутренние волны в зональном канале постоянной ширины // В кн.: Поверхностные и внутренние волны. Севастополь: МГИ АН УССР, 1979. – С. 171 – 185.
43. Букатов А.Е., Богуславский С.Г., Ефимов В.В., Черкесов Л.В. и др. Комплексные океанографические исследования Черного моря // Киев: Наукова думка, 1980.
44. Букатов А.Е. Влияние продольного сжатия на неустановившиеся колебания дрейфующего льда // Морские гидрофизические исследования, 1980, № 1. – С. 30 – 43.
45. Букатов А.Е. Влияние ледового сжатия на неустановившиеся изгибно-гравитационные волны // Океанология, 1980, т. 20, № 4. – С. 600 – 606.
46. Букатов А.Е. Влияние продольно сжатой упругой пластинки на неустановившееся движение однородной жидкости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1980, № 5. – С. 68 – 75.
47. Букатов А.Е., Букатова О.М. Внутренние волны в зональном канале переменной глубины // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1980, т. 16, № 12. – С. 1276 – 1283.

48. Букатов А.Е., Ерыго Г.Г., Пухтяр Л.Д., Черкесов Л.В. Внутренние волны в прибрежной зоне Черного моря // В кн.: Комплексные гидрофизические и гидрохимические исследования Черного моря, Севастополь: МГИ АН УССР, 1980. – С. 22 – 32.
49. Букатов А.Е., Пухтяр Л.Д. Зависимость волнового движения от направления перемещения атмосферного возмущения // В кн.: Комплексные гидрофизические и гидрохимические исследования Черного моря, Севастополь: МГИ АН УССР, 1980. – С. 33 – 40.
50. Букатов А.Е., Ярошенко А.А. Неустановившиеся изгибно-гравитационные волны от импульсных возмущений в условиях ледового сжатия // В кн.: Теоретические и экспериментальные исследования поверхностных и внутренних волн. Севастополь: МГИ АН УССР, 1980. – С. 65 – 73.
51. Букатов А.Е., Пухтяр Л.Д. Внутренние волны в районе полигона "Полимоде" // В кн.: Структура, динамика и кинематика синоптических вихрей. Севастополь: МГИ АН УССР, 1980. – С. 101 – 106.
52. Букатов А.Е., Мордашев В.И. Влияние продольно сжатой упругой пластинки на развитие волнового возмущения потока однородной жидкости с вертикальным сдвигом скорости // Журнал прикладной механики и технической физики, 1981, № 1. – С. 122 – 129.
53. Букатов А.Е. Влияние продольного сжатия на неустановившиеся колебания упругой пластинки, плавающей на поверхности жидкости // Прикладная механика, 1981, т. 17, № 1. – 93 – 98.
54. Букатов А.Е., Мордашев В.И. Неустановившиеся капиллярно-гравитационные волны // В кн.: Экспериментальные и теоретические вопросы волновых движений жидкости. Краснодар: Кубанский госуниверситет, 1981. – С. 29 – 37.
55. Букатов А.Е., Букатова О.М. Вынужденные внутренние волны в районе с разломом дна // В кн.: Поверхностные и внутренние волны. Севастополь: МГИ АН УССР, 1981. – С. 34 – 40.
56. Букатов А.Е., Бабий М.В., Голубев Ю.Н., Иванов В.Ф., Сергеевский Б.Ю. Генерация, дифракция и распространение длинных волн // В кн.: Волны и дифракция. М.: Наука, 1981, т. 1. – С. 147 – 150.
57. Букатов А.Е., Пухтяр Л.Д., Черкесов Л.В. Влияние горизонтальной диффузии и вязкости на внутренние волны // Морские гидрофизические исследования, 1982. – С. 28 – 37.

58. Букатов А.Е., Букатова О.М. Влияние широтного изменения параметра Кориолиса на длинные вынужденные внутренние волны // Морские гидрофизические исследования, 1982. – С. 38 – 46.
59. Букатов А.Е. Развитие волнового возмущения потока с вертикальным сдвигом скорости в условиях ледового сжатия // В кн.: Теоретическое моделирование волновых процессов в океане. Севастополь: МГИ АН УССР, 1982. – С. 52 – 60.
60. Букатов А.Е., Пухтяр Л.Д., Черкесов Л.В. Влияние вертикальной диффузии плотности на внутренние волны // В кн.: Теоретическое моделирование волновых процессов в океане. Севастополь: МГИ АН УССР, 1982. – С. 98 – 106.
61. Букатов А.Е., Пухтяр Л.Д., Черкесов Л.В. Зависимость волнового движения от горизонтальной диффузии плотности и скорости течения // В кн.: Системный анализ и моделирование процессов на шельфе моря, Севастополь: МГИ АН УССР, 1983. – С. 78 – 83.
62. Букатов А.Е. Влияние сжимающих усилий на развитие изгибно-гравитационных волн от периодических возмущений // В кн.: Теоретические исследования волновых процессов в океане. Севастополь: МГИ АН УССР, 1983. – С. 5 – 12.
63. Букатов А.Е., Ярошенко А.А. Трехмерные изгибно-гравитационные волны в условиях равномерного сжатия // В кн.: Теоретические исследования волновых процессов в океане. Севастополь: МГИ АН УССР, 1983. – С. 13 – 21.
64. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Волны в неоднородном море // Киев: Наукова думка, 1983. – 224 с.
65. Букатов А.Е., Черкесов Л.В., Ярошенко А.А. Изгибно-гравитационные волны от движущихся возмущений // Журнал прикладной механики и технической физики, 1984, № 2. – С. 151 – 157.
66. Букатов А.Е., Альтман Э.Н., Пухтяр Л.Д., Черкесов Л.В. Влияние некоторых составляющих водного баланса Черного моря на внутренние волны // В кн.: Комплексные исследования Черного моря. Севастополь: МГИ АН УССР, 1984. – С. 71 – 76.
67. Букатов А.Е., Ярошенко А.А. Влияние битого льда на развитие трехмерных волн от движущихся возмущений // В кн.: Моделирование поверхностных и внутренних волн. Севастополь: МГИ АН УССР, 1984. – С. 5 – 11.

68. Букатов А.Е., Букатова О.М. Влияние сил трения на длинные вынужденные поверхностные волны в бассейне переменной глубины // В кн.: Моделирование поверхностных и внутренних волн. Севастополь: МГИ АН УССР, 1984. – С. 95 – 101.
69. Букатов А.Е. Волны сжатия в ледяном покрове // В кн.: Волновые движения жидкости: теория и эксперимент. Краснодар: Кубанский госуниверситет, 1984. – С. 24 – 32.
70. Букатов А.Е., Ярошенко А.А. Влияние равномерно сжатой плавающей пластинки на развитие трехмерных волн в однородной жидкости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1984, № 6. – С. 78 – 83.
71. Букатов А.Е., Букатова О.М. Внутренние волны в бассейне с переменной глубиной поверхности раздела плотности // Морской гидрофизический журнал, 1985, № 2. – С. 27 – 31.
72. Букатов А.Е., Ярошенко А.А. Развитие трехмерных колебаний упругой равномерно растянутой плавающей пластинки // Динамические системы. Киев: Виша школа, 1985, вып. 4. – С. 72 – 77.
73. Букатов А.Е., Ярошенко А.А. Развитие трехмерных изгибно-гравитационных волн в море с ледяным покровом // В сб.: Волны и дифракция-85. Тбилиси: Тбилисский госуниверситет, 1985, т. 2. – С. 351 –353.
74. Букатов А.Е., Ярошенко А.А. Развитие трехмерных изгибно-гравитационных волн при движении области давлений переменной интенсивности // Журнал прикладной механики и технической физики, 1986, № 5. – С. 54 – 60.
75. Букатов А.Е., Жарков В.В. Развитие трехмерных внутренних волн в море с ледяным покровом // Морской гидрофизический журнал, 1986, № 6. – С. 3 – 9.
76. Букатов А.Е., Альтман Э.Н., Пухтяр Л.Д., Черкесов Л.В. Влияние речного стока на внутренние волны // Тр. ГОИН, 1986, № 168. "Вопросы гидрологии морей". – С. 26 – 31.
77. Букатов А.Е., Букатова О.М. Вынужденные волны в двухслойной жидкости с переменной глубиной невозмущенной поверхности скачка плотности // Морской гидрофизический журнал, 1987, № 5. – С. 8 – 14.
78. Букатов А.Е., Жарков В.В. Прогиб плавающего льда вблизи движущейся с малой скоростью области давлений // Морской гидрофизический журнал, 1988, № 2. – С. 3 – 8.

79. Букатов А.Е., Гончаров А.М. Развитие изгибно-гравитационных вынужденных колебаний плавающей неравномерно сжатой упругой пластинки // Динамические системы. Киев: Виша школа, 1988, вып. 7. – С. 58 – 62.
80. Букатов А.Е., Власенко В.И., Пухтяр Л.Д., Суворов А.М. и др. Динамика поверхностных и внутренних волн // Киев: Наукова думка, 1988. – 192 с.
81. Букатов А.Е., Беляков Ю.М., Пухтяр Л.Д. Оценка характеристик внутренних волн на близком к инерционному периоде // В сб.: Процессы формирования и внутригодовой изменчивости гидрохимических полей Чёрного моря. Севастополь: МГИ АН УССР, 1988. – С. 60 – 65.
82. Букатов А.Е., Жарков В.В. Трехмерные изгибно-гравитационные колебания вблизи движущейся области давлений // Журнал прикладной механики и технической физики, 1989, № 3. – С. 158 – 166.
83. Букатов А.Е., Гончаров А.М. Изгибно-гравитационные волны при неравномерном сжатии // Морской гидрофизический журнал, 1989, № 4. – С. 35 – 39.
84. Букатов А.Е., Черкесов Л.В., Суворов А.М., Власенко В.И. и др. Поверхностные и внутренние гравитационные волны в океане // Киев: Наукова думка, 1989. – 144 с.
85. Букатов А.Е., Беляков Ю.М., Букатова О.М. Влияние вдольбереговых локализованных потоков над склонами дна на длинные вынужденные волны // Комплексные океанографические исследования Чёрного моря. Севастополь: МГИ АН УССР, 1989. – С. 51 – 59.
86. Букатов А.Е., Жарков В.В. Трехмерные внутренние волны в ближней зоне при движении нагрузки по поверхности плавающей упругой пластинки // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1990, № 1. – С. 85 – 91.
87. Букатов А.Е., Жарков В.В. Моделирование трехмерных изгибных колебаний ледяного покрова при движении области давлений // Морской гидрофизический журнал, 1990, № 4. – С. 10 – 15.
88. Букатов А.Е., Соломаха Т.А. Затухание изгибно-гравитационных волн // Морской гидрофизический журнал, 1990, № 5. – С. 18 – 24.

89. Букатов А.Е., Перов М.Г., Соловей Н.М. Свободные внутренние волны в глубоководной зоне Черного моря // Комплексные океанографические исследования Черного моря. Севастополь: МГИ АН УССР, 1990. – С. 44 – 51.
90. Букатов А.Е. Волны от движущихся возмущений в бассейне с ледяным покровом // Методы гидрофизических исследований. Турбулентность и микроструктура. Горький: ИПФ АН СССР, 1990. – С. 247 – 258.
91. Букатов А.Е. Изгибно-гравитационные волны при движении давлений по круговой траектории // В сб.: Теоретич. и экспериментальные исследования волновых процессов в океане. Севастополь: МГИ АН УССР, 1991. – С. 37 – 41.
92. Букатов А.Е., Соломаха Т.А. Влияние вязкости снега на вынужденные изгибно-гравитационные волны в бассейне со скачком плотности // Морской гидрофизический журнал, 1991, № 4. – С. 16 – 21.
93. Букатов А.Е., Соломаха Т.А. Волновые возмущения в бассейне с ледяным покровом // В кн.: Волновые движения жидкости и смежные вопросы. Краснодар: Кубанский госуниверситет, 1991. – С. 4 – 14.
94. Букатов А.Е., Жарков В.В., Завьялов Д.Д. Трехмерные изгибно-гравитационные волны при неравномерном сжатии // Прикладная механика и техническая физика, 1991, № 6. – С. 51 – 57.
95. Букатов А.Е., Жарков В.В. Корабельные волны в непрерывно стратифицированном бассейне с ледяным покровом // Морской гидрофизический журнал, 1992, № 1. – С. 10 – 18.
96. Букатов А.Е., Жарков В.В. Генерация трехмерных внутренних волн движущейся по плавающему льду областью давлений // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1992, т. 28, № 4. – С. 416 – 423.
97. Букатов А.Е., Букатова О.М. Поверхностные волны конечной амплитуды в бассейне с битым льдом // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана, 1993, т. 29, № 3. – С. 421 – 425.
98. Букатов А.Е., Жарков В.В. Трехмерные возмущения в экспоненциально стратифицированном бассейне с ледяным покровом при движении области постоянного давления // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана, 1993, т. 29, № 5. – С. 681 – 687.
99. Букатов А.Е. Нелинейное взаимодействие поверхностных волн в бассейне с битым льдом // Изв. РАН. Механика жидкости и газа, 1994, № 4. – С. 136 – 143.

100. Bukatov A.E., Solomakha T.A. The Influence of the Ice Cover Viscosity on the Three-Dimensional Surface Waves // Report Series in Geophysics. University of Helsinki, 1994, № 28. – P. 25 – 32.
101. Букатов А.Е., Жарков В.В. Влияние плавающей упругой пластины на поверхностные проявления внутренних волн при движении источника в неоднородной жидкости // Изв. РАН Механика жидкости и газа, 1995, № 2. – С. 118 – 125.
102. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д. Набегание поверхностных волн на кромку сжатого льда // Изв. РАН. Механика жидкости и газа, 1995, № 3. – С. 121 – 126.
103. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д. Влияние трещины в плавающей упругой пластинке на распространение изгибно-гравитационных волн // Прикладная механика и техническая физика, 1995, т. 36, № 4, 170 – 175.
104. Букатов А.Е., Соломаха Т.А. Влияние вязкоупругих свойств льда на трёхмерные поверхностные волны // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана, 1995, т. 31, № 6. – С. 852 – 857.
105. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д. Оценка экранирующей и пропускной способностей кромки льда при распространении волн к берегу северо-западной части Черного моря // Океанология, 1996, т. 36, № 2. – С. 226 – 230.
106. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д. Некоторые особенности распространения изгибно-гравитационных волн при наличии разлома в ледяном покрове // Изв. РАН. Механика жидкости и газа, 1996, № 2. – С. 144 – 150.
107. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д. Трансформация ветровых волн ледяным покровом в северо-западной части Черного моря // Метеорология и гидрология, 1996, № 3. – С. 83 – 93.
108. Bukatov A.E., Zharkov V.V. Formation of the Ice Cover's Flexural Oscillations by Action of Surface and Internal Ship Waves - Part I. Surface Waves // International Journal of Offshore and Polar Engineering, 1997, Vol. 7, № 1. – P. 1 – 12.
109. Bukatov A.E., Zharkov V.V. Formation of the Ice Cover's Flexural Oscillations by Action of Surface and Internal Ship Waves - Part II. Internal Wave Manifestations in Ice Bend // International Journal of Offshore and Polar Engineering, 1997, Vol. 7, No. 2. – P. 81 – 88.

110. Букатов А.Е., Жарков В.В. Генерация трёхмерных изгибных колебаний плавающей упругой пластинки при движении сосредоточенной нагрузки по сложной траектории // Прикладная механика и техническая физика, 1997, т. 38, № 3. – С. 164 – 173.
111. Букатов А.Е., Абрамсон Г.А., Авдеев А.И., Андрющенко Е.Г. и др. Концепция построения автоматизированной системы экологического контроля вод Украины // Севастополь: МГИ НАНУ, 1997. – 223 с.
112. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д. Набегание изгибно-гравитационных волн на линию контакта двух плавающих ледяных пластин разной толщины // Морской гидрофизический журнал, 1998, № 1. – С.11 – 17.
113. Букатов А.Е., Букатов А.А. Перенос массы нелинейной волной в бассейне с плавающим битым льдом // Морской гидрофизический журнал, 1998, № 5. – С.12 – 16.
114. Букатов А.Е., Букатов А.А., Жарков В.В., Ижко В.А. Аномалии силы тяжести за счёт приливных деформаций поверхности земного шара // Геофизический журнал, 1998, т. 20, № 5. – С. 57 – 62.
115. Букатов А.Е., Жарков В.В. Влияние битого льда на распространение поверхностных волн над уступом дна // Изв. РАН. Механика жидкости и газа, 1998, № 6. – С. 106 – 115.
116. Bukatov A.E., Bukatov A.A. Propagation of Surface Waves of Finite Amplitude in a Basin With Floating Broken Ice // International Journal of Offshore and Polar Engineering, 1999, Vol. 9, № 3. – P. 161 – 166.
117. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д., Жарков В.В. Трансформация ветровых волн при выходе на мелководье // Морской гидрофизический журнал, 2000, № 2. – С. 3 – 11.
118. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д. Влияние сдвига и инерции вращения поперечных сечений на колебания плавающего ледяного покрова // Морской гидрофизический журнал, 2000, № 6. – С. 28 – 35.
119. Букатов А.Е., Букатова О.М., Соловей Н.М. Свободные внутренние волны в заливе Прюдс моря Содружества // В сб.: Системы контроля окружающей среды. Севастополь: МГИ НАН Украины, 2001. – С. 297 – 300.
120. Букатов А.Е., Бабий М.В., Ижко В.А Эмпирические модели температурного поля атмосферы над Крымским полуостровом и температуры воздуха над поверхностью Черного моря // В сб.: Системы контроля окружающей среды. Севастополь: МГИ НАН Украины, 2001. – С. 369 – 372.

121. Bukatov A.E., Zharkov V.V. The Floating Continuous Ice Cover Flexural Oscillations When a Load is Moving Along a Complicated Trajectory // Journal of Offshore and Polar Engineering, 2001, Vol. 11, No. 1. – P. 1 – 8.
122. Букатов А.Е., Букатов А.А. Перенос массы при нелинейном взаимодействии поверхностных волн в бассейне с плавающим битым льдом // Морской гидрофизический журнал, 2001, № 2. – С. 3 – 10.
123. Букатов А.Е., Богуславский С.Г., Казаков С.И. Особенности поля скорости и вертикального обмена в Черном море // Сб. научн. тр.: Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. Севастополь, МГИ НАН Украины, 2001, Вып. 3. – С. 62 – 67.
124. Букатов А.Е., Богуславский С.Г., Казаков С.И., Соловей Н.М. Влияние вязкости и плотностной стратификации на периоды инерционных циклов // Сб. научн. тр.: Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. Севастополь, МГИ НАН Украины, 2001, Вып. 4. – С. 30 – 39.
125. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д., Букатова О.М., Соломаха Т.А. Влияние ледяного покрова на волновые возмущения в Азовском море // Морской гидрофизический журнал, 2001, № 4. – С. 11 – 22.
126. Букатов А.Е., Жарков В.В. Влияние битого льда на скорость волновых течений при прохождении поверхностных волн над уступом дна // Морской гидрофизический журнал, 2001, № 5. – С. 3 – 14.
127. Букатов А.Е., Бабий М.В., Станичный С.В. Аппроксимационная модель поверхностной температуры Черного моря по спутниковым данным 1991–1998 гг. // В сб.: Системы контроля окружающей среды. Севастополь: МГИ НАН Украины, 2002. – С. 243 – 250.
128. Букатов А.Е., Букатов А.А. Нелинейные поверхностные волны в бассейне с плавающим битым льдом // Морской гидрофизический журнал, 2002, № 5. – С. 34 – 46.
129. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д. Волновые течения, генерируемые в покрытой льдом жидкости при движении нагрузки // Морской гидрофизический журнал, 2002, № 6. – С. 3 – 11.
130. Букатов А.Е., Соломаха Т.А. Зависимость характеристик волновых возмущений от реологических свойств ледяного покрова // В сб.: Системы контроля окружающей среды. Мониторинг и модели. Севастополь: МГИ НАН Украины, 2003. – С. 139 – 141.

131. Букатов А.Е., Бабий М.В., Станичный С.В. Межгодовая изменчивость температуры поверхности Чёрного моря по спутниковым измерениям 1986-2000 гг. // В сб.: Системы контроля окружающей среды. Мониторинг и модели. Севастополь: МГИ НАН Украины, 2003. – С. 158 – 163.
132. Bukatov A.E., Bukatov A.A., Zharkov V.V., Zav'yalov D.D. Wave Dynamics Features in a Ice Sea Area // Український антарктичний журнал, 2003, № 1. – С. 25 – 29.
133. Букатов А.Е., Букатов А.А. Взаимодействие поверхностных волн в бассейне с плавающим битым льдом // Морской гидрофизический журнал, 2003, № 6. – С. 3 – 22.
134. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д. Вызванное ветром движение воды в мелководных замкнутых бассейнах // Морской гидрофизический журнал, 2004, № 5. – С. 35 – 44.
135. Букатов А.Е., Бабий М.В., Станичный С.В. Прогноз среднемесячной температуры поверхности Черного моря по среднемесячной температуре в марте // Доповіді НАН України, 2004, № 8. – С. 117 – 122.
136. Букатов А.Е., Бабий М.В., Станичный С.В. Анализ температуры поверхности Черного моря по среднемесячным данным спутниковых измерений // В сб.: Системы контроля окружающей среды, Севастополь: МГИ НАН Украины, 2004. – С. 143 – 145.
137. Букатов А.Е., Букатова О.М. Влияние ледового сжатия на стоячие колебания в замерзающем бассейне // В сб.: Системы контроля окружающей среды, Севастополь: МГИ НАН Украины, 2004. – С. 187 – 190.
138. Букатов А.Е., Артамонов Ю.В., Соловей Н.М. Сезонная изменчивость глубины залегания максимума частоты Вяйсяля-Брента в Атлантическом океане // В сб.: Системы контроля окружающей среды, Севастополь: МГИ НАН Украины, 2004. – С. 217 – 219.
139. Букатов А.Е., Доценко С.Ф., Суворов А.М., Черкесов Л.В. Математическое моделирование поверхностных и внутренних волн в морях и океанах // В кн.: Развитие морских наук и технологий в Морском гидрофизическом институте за 75 лет. Севастополь: МГИ НАН Украины, 2004. – С. 104 – 131.

140. Букатов А.Е., Жарков В.В. Гидродинамическое давление в жидкости при движении области постоянных возмущений по плавающему ледяному покрову // Морской гидрофизический журнал, 2005, № 1. – С. 3 – 14.
141. Букатов А.Е., Бабий М.В., Станичный С.В. Атлас температуры поверхности Черного моря по спутниковым данным 1986-2002 гг. // Севастополь: МГИ НАН Украины, 2005.
142. Букатов А.Е., Артамонов Ю.В., Соловей Н.М., Скрипалева Е.А. Исследование зависимости пространственной структуры и фазовых характеристик первой моды внутренних волн от гидрологических условий в Атлантическом океане // Морской гидрофизический журнал, 2005, № 4. – С. 3 – 10.
143. Букатов А.Е., Букатов А.А. Капиллярно-гравитационные волны конечной амплитуды на поверхности однородной жидкости // Морской гидрофизический журнал, 2005, № 5. – С. 25 – 34.
144. Букатов А.Е., Жарков В.В. Распределение изгибного напряжения в морском ледяном покрове при равномерном перемещении области постоянных давлений // Морской гидрофизический журнал, 2005, № 6. – С. 3 – 16.
145. Букатов А.Е., Букатова О.М. Влияние вязких свойств плавающего льда на стоячие поверхностные волны в ограниченном бассейне // В сб.: Системы контроля окружающей среды. Севастополь: МГИ НАН Украины, 2005. – С. 268 – 271.
146. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д., Соломаха Т.А. Затухание нелинейных колебаний в ограниченном бассейне переменной глубины // Морской гидрофизический журнал, 2006, № 2. – С. 3 – 11.
147. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д., Соломаха Т.А. Численное моделирование динамики Азовского моря при сгонно-нагонных явлениях // Метеорология и гидрология, 2006, № 6. – С. 69 – 75.
148. Букатов А.Е., Артамонов Ю.В., Бабий М.В., Скрипалева Е.А. Внутригодовая изменчивость трендов температуры в Атлантическом океане вдоль 30°з. д. // В сб.: Системы контроля окружающей среды, Севастополь: МГИ НАН Украины, 2006. – С. 230 – 232.

149. Букатов А.Е., Артамонов Ю.В., Белокопытов В.Н., Соловей Н.М., Скрипалева Е.А., Халиулин А.Х. Исследование сезонной изменчивости апелинга у берегов юго-западной Африки // В сб.: Системы контроля окружающей среды, Севастополь: МГИ НАН Украины, 2006. – С. 241 – 243.
150. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д., Соломаха Т.А. Зависимость характеристик сгонно-нагонных колебаний Азовского моря от параметров барического возмущения // В сб.: Системы контроля окружающей среды, Севастополь: МГИ НАН Украины, 2006. – С. 247 – 250.
151. Букатов А.Е., Артамонов Ю.В., Бабий М.В., Скрипалева Е.А. Сезонная изменчивость линейных трендов поля температуры в южной части Атлантического океана по спутниковым данным // В сб.: Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. Севастополь: МГИ НАН Украины, 2006. – С. 422 – 427.
152. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д. Формирование поля скорости течений локализованным поднятием уровня Азовского моря // В сб.: Системы контроля окружающей среды, Севастополь: МГИ НАН Украины, 2007. – С. 179 – 181.
153. Букатов А.Е., Артамонов Ю.В., Бабий М.В. Корреляционные связи индексов атмосферной циркуляции с аномалиями температуры поверхности Мирового океана за 1870-2002 гг. // В сб.: Системы контроля окружающей среды, Севастополь: МГИ НАН Украины, 2007. – С. 166 – 169.
154. Букатов А.Е., Артамонов Ю.В., Соловей Н.М. Исследование сезонной изменчивости частоты Вяйсяля-Брента в районе Канарского апвеллинга по данным контактных измерений // В сб.: Системы контроля окружающей среды, Севастополь: МГИ НАН Украины, 2007. – С. 170 – 172.
155. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д. Эволюция начального смещения участка свободной поверхности в Азовском море // Морской гидрофизический журнал, 2008, № 1. – С. 3 – 11.
156. Букатов А.Е., Артамонов Ю.В., Бабий М.В., Скрипалева Е.А. Региональные особенности сезонной изменчивости линейных трендов поля температуры в Атлантическом океане и их связь с крупномасштабной циркуляцией // Морской гидрофизический журнал, 2008, № 4. – С. 17 – 27.

157. Букатов А.Е., Букатов А.А. Нелинейные капиллярно-гравитационные волны в однородной жидкости // Прикладная гидромеханика, 2008, т. 10 (82), № 2. – С. 24 – 35.
158. Букатов А.Е., Артамонов Ю.В., Бабий М.В., Скрипалева Е.А. Особенности корреляционных связей между индексом Южное колебание и температурой поверхности в экваториальной части Тихого океана // В сб.: Системы контроля окружающей среды. Севастополь: МГИ НАН Украины, 2008. – С. 231 – 235.
159. Букатов А.Е., Артамонов Ю.В., Соловей Н.М. Сезонная изменчивость частоты Вяйсяля-Брента и характеристик первой моды внутренних волн в районе Бенгельского апеллинга // В сб.: Системы контроля окружающей среды. Севастополь: МГИ НАН Украины, 2008. – С. 250 – 253.
160. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д., Белокопытов В.Н., Соломаха Т.А. Гидродинамический отклик Азовского моря на прохождение циклонического атмосферного образования // В сб.: Системы контроля окружающей среды. Севастополь: МГИ НАН Украины, 2008. – С. 240 – 242.
161. Букатов А.Е., Бабий М.В., Белокопытов В.Н., Моисеева Е.А. Изменчивость пространственного распределения частоты плавучести и характеристик внутренних волн в Черном море // В сб. Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. Севастополь: МГИ НАН Украины, 2009, вып.18. – С. 130 – 140.
162. Букатов А.Е., Бабий М.В., Моисеева Е.А. Климатическая изменчивость температуры воздуха, количества осадков и режима облачности в регионе Азовского моря // В сб. Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. Севастополь: МГИ НАН Украины, 2009, вып.18. – С. 168 – 179.
163. Букатов А.Е., Моисеева Е.А. Климатическая изменчивость ледового режима Азовского моря // В сб. Системы контроля окружающей среды. Севастополь: МГИ НАН Украины, 2009. – С. 273 – 279.
164. Букатов А.Е., Букатов А.А. Волны конечной амплитуды в однородной жидкости с плавающей упругой пластиной // Прикладная механика и техническая физика, 2009, т. 50, № 5. – С. 67 – 74.

165. Букатов А.Е., Артамонов Ю.В., Бабий М.В., Скрипалева Е.А. Корреляционные связи аномалий температуры поверхности Тихого океана и индекса Южного колебания // Український Антарктичний журнал, 2009, № 8. – С. 137 – 146.
166. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д., Белокопытов В.Н., Соломаха Т.А. Численное моделирование динамики Азовского моря при прохождении циклонического атмосферного образования // Метеорология и гидрология, 2009, № 10. – С. 45 – 54.
167. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д., Соломаха Т.А. Динамика Азовского моря в ледовых условиях // Геоінформатика, 2010, № 2. – С. 54 – 60.
168. Букатов А.Е., Букатов А.А. О нелинейных колебаниях плавающей упругой пластинки // Прикладная механика, 2010, т. 46, № 10. – С. 62 – 70.
169. Букатов А.Е., Соловей Н.М. Межгодовая и сезонная изменчивость термического индекса Перуанского апвеллинга // В сб. Системы контроля окружающей среды. Севастополь: МГИ НАН Украины, 2010, вып. 14. – С. 135 – 137.
170. Букатов А.Е., Еремеев В.Н., Букатов А.А., Бабий М.В. Влияние снежно-ледового покрова на теплообмен океана и атмосферы в Антарктике // Геоінформатика, 2011, № 1. – С. 57 – 61.
171. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д., Соломаха Т.А. Моделирование распределения ледовитости и сплоченности плавающего льда в Азовском море // В сб. Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. Севастополь: МГИ НАН Украины, 2011, вып. 24. – С. 235 – 243.
172. Букатов А.Е., Павленко Е.А. Оценка влияния нарушений однородности рядов климатических данных на определение характеристик изменчивости атмосферных осадков в регионе Азовского моря // В сб. Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. Севастополь: МГИ НАН Украины, 2011, вып. 24. – С. 151 – 162.
173. Букатов А.Е., Еремеев В.Н., Бабий М.В., Букатов А.А. Проявление фазы Эль-Ниньо - Южное колебание в географическом положении внутритропической зоны конвергенции // Доповіді НАН України, 2011, № 10. – С. 93 – 98.

174. Букатов А.Е., Соловей Н.М. Внутригодовая изменчивость характеристик Бенгельского и Перуанского апвеллингов // В сб. Системы контроля окружающей среды. Севастополь: МГИ НАН Украины, 2011, вып. 16. – С. 180 – 185.
175. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д., Соломаха Т.А. Численное моделирование выноса льда из Азовского моря в Керченский пролив // Геоінформатика, 2012, № 1. – С. 57 – 62.
176. Букатов А.Е., Павленко Е.А. Анализ связи климатической изменчивости метеорологических характеристик и ледового режима Азовского моря с индексами атмосферной циркуляции // В сб.: Физические проблемы экологии (Экологическая физика). М.: МАКС Пресс, 2012, № 18. – С. 48 – 72.
177. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д., Соломаха Т.А. Численное моделирование дрейфа льда в Азовском море // Метеорология и гидрология, 2012, № 6. – С. 36 – 45.
178. Букатов А.Е., Бабий М.В., Белокопытов В.Н., Павленко Е.А. Пространственно-временная изменчивость частоты плавучести, вертикальной структуры свободных внутренних волн и температуры поверхности Черного моря // Устойчивость и эволюция океанологических характеристик экосистемы Черного моря. Севастополь: «Экоси-гидрофизика», 2012. – С. 126 – 142.
179. Букатов А.Е., Павленко Е.А. Оценка влияния нарушений однородности рядов климатических данных на определение характеристик изменчивости атмосферных осадков в регионе Азовского моря // Экологическая безопасность приморских регионов (порты, берегозащита, рекреация, марикультура). Ростов-на-Дону: ЮНЦ РАН, 2012. – С. 75 – 78.
180. Букатов А.Е., Соловей Н.М. Исследование характеристик Орегонского апвеллинга // В сб. Системы контроля окружающей среды. Севастополь: МГИ НАН Украины, 2012. – С. 109 – 112.
181. Букатов А.Е., Букатов А.А. Нарастание и таяние льда в условиях Азовского моря // В сб.: Физические проблемы экологии (Экологическая физика). М.: МАКС Пресс, 2013, № 19. – С. 108 – 120.
182. Букатов А.Е., Павленко Е.А. Пространственно-временная изменчивость вертикальной устойчивости вод Азовского моря // В сб. Физические проблемы экологии (Экологическая физика). М.: МАКС Пресс, 2013, № 19. – С. 121 – 132.

183. Букатов А.Е., Еремеев В.Н., Бабий М.В., Букатов А.А. Пространственно-временная изменчивость распределения морского льда в Антарктике // Геоінформатика, 2013, № 1 (45). – С. 63 – 71.
184. Букатов А.Е., Еремеев В.Н., Букатов А.А., Бабий М.В. Межгодовая изменчивость теплообмена океана и атмосферы в Антарктике // Доповіді НАН України, 2013, № 1. – С. 96 – 104.
185. Букатов А.Е., Соловей Н.М. Оценка связи внутригодовой изменчивости характеристик прибрежных апвеллингов с индексами атмосферной циркуляции // В сб. Системы контроля окружающей среды. Севастополь: МГИ НАН Украины, 2013. – С. 122 –125.
186. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д., Соломаха Т.А. Влияние Тузлинской дамбы на распределение Азовоморского льда в Керченском проливе при северном и северо-восточном ветре // В сб. Системы контроля окружающей среды. Севастополь: МГИ НАН Украины, 2013. – С. 140 – 143.
187. Букатов А.Е., Еремеев В.Н., Бабий М.В., Букатов А.А. Структура поля приземного ветра над Мировым океаном // Геоінформатика, 2014, № 3. – С. 67 – 76.
188. Букатов А.Е., Павленко Е.А. Влияние гидрометеорологических условий на изменчивость концентраций загрязняющих веществ в устьевых зонах Азовского моря // В сб. Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. Севастополь: МГИ, 2014, вып. 28. – С. 368 – 374.
189. Букатов А.Е., Соловей Н.М. Оценка связи термического индекса апвеллинга с частотой плавучести и характеристиками внутренних волн в районах подъема глубинных вод у западных берегов Африки и Америки // Процессы в геосредах, 2014, № 1, (1). – С. 34 – 39.
190. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д., Соломаха Т.А. Влияние вязкопластических свойств дрейфующего льда на эволюцию поля его сплоченности // Процессы в геосредах, 2015, № 2. – С. 13 – 21.
191. Букатов А.Е., Павленко Е.А. Влияние речного стока на изменчивость запасов основных промысловых рыб Азовского моря // Сб. Экология, экономика, информатика. Ростов–на–Дону: Южный федеральный университет, 2015, т.1. – С. 77 – 86.
192. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д., Соломаха Т.А. Влияние выносной адвекции Азовоморского льда на формирование ледового режима в Керченском проливе // Сб. Экология, экономика, информатика. Ростов–на–Дону: Южный федеральный университет, 2015, т. 2. – С. 705 – 717.

193. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д., Соломаха Т.А. Анализ зависимости ветрового дрейфа льда в Азовском море от изменений коэффициентов трения на границах раздела воздух–лед и лед–вода // Процессы в геосредах, 2016, № 5(1). – С. 28 – 36.
194. Букатов А.Е., Букатов А.А., Бабий М.В. Региональная изменчивость площади морского льда в Антарктике // Метеорология и гидрология, 2016, № 6. – С. 39 – 47.
195. Букатов А.Е., Букатов А.А., Бабий М.В. Проявление солнечной активности в изменчивости регионального распределения морского льда в Антарктике // Процессы в геосредах, 2016, № 2. – С. 104 – 111.
196. Букатов А.Е., Соловей Н.М. Оценка связи внутригодовой изменчивости характеристик апеллингов у западных берегов Африки и Америки и крупномасштабной атмосферной циркуляции // Тр. ГОИН, 2016, № 217. – С. 117 – 126.
197. Букатов А.Е., Букатов А.А., Бабий М.В. Отклик воздействия внутренних и внешних факторов в широтном смещении кромки морского льда в арктическом бассейне // Морской гидрофизический журнал, 2016. № 6. – С. 28 – 36.
198. Букатов А.Е., Букатов А.А., Бабий М.В. Пространственно-временная изменчивость распределения морского льда в Арктике // Криосфера Земли, 2017, т. XXI, № 1. – С. 85 – 92.
199. Букатов А.Е., Букатов А.А., Бабий М.В. Атлас структуры поля ветра // ФГБУН «Морской гидрофизический институт РАН», г. Севастополь, 2017. – 298 с. (ISBN 978-5-9908460-3-6, DOI: 10.22449/978-5990-846-036, http://mhi-ras.ru/assets/files/atlas_struktury_polya_vetra.pdf)
200. Букатов А.Е., Соловей Н.М. Оценка связи вертикальной структуры поля плотности и характеристик внутренних волн с крупномасштабной атмосферной циркуляцией в акваториях Перуанского и Бенгельского апеллингов // Процессы в геосредах, 2017, № 2 (11). – С. 485 – 490.
201. Букатов А.Е., Павленко Е.А. Пространственно-временная изменчивость распределения частоты плавучести в Чукотском море // Процессы в геосредах, 2017, № 3 (12). – С. 565 – 572.
202. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д., Соломаха Т.А. Термическая эволюция морского льда в Таманском и Динском заливах // Морской гидрофизический журнал, 2017. № 5. – С. 21 – 34.
203. Букатов А.Е. Волны в море с плавающим ледяным покровом // ФГБУН МГИ. г. Севастополь, 2017. – 360 с.

204. Букатов А.Е., Букатов А.А. Фазовая структура колебаний жидкости с плавающей упругой ледяной пластинкой при нелинейном взаимодействии прогрессивных поверхностных волн // Морской гидрофизический журнал, 2018, № 1. – С. 5 – 19.
205. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д., Соломаха Т.А. Пространственно-временная эволюция распределения толщины морского льда по акваториям Керченской и Камыш-Бурунской бухт // Метеорология и гидрология, 2018, № 2. – С. 26 – 36.
206. Букатов А.Е., Букатов А.А. Межгодовая изменчивость теплообмена океана и атмосферы в Арктике // Процессы в геосредах, 2018, № 2 (15). – С. 825-832.
207. Букатов А.Е., Букатов А.А. Колебания плавающей упругой пластинки при нелинейном взаимодействии прогрессивных изгибно-гравитационных волн // Прикладная механика и техническая физика. 2018, т. 49, № 4. – С. 99 – 109.

Авторские свидетельства

1. Букатов А.Е., Парамонов А.Н., Петрухнов А.Ф. Буйковый океанографический комплекс // Авторское свидетельство № 820111, бюллетень, 1981, № 13.
2. Букатов А.Е., Парамонов А.Н., Петрухнов А.Ф. Буй с автоматически разворачивающейся измерительной линией // Авторское свидетельство № 824606, бюллетень, 1981, № 15.
3. Букатов А.Е., Парамонов А.Н., Петрухнов А.Ф., Черкесов Л.В. Устройство для определения параметров внутренних волн в жидкости // Авторское свидетельство № 1026019, бюллетень, 1983, № 24.

Научное издание

Алексей Евтихиевич Букатов
Антон Алексеевич Букатов
Владимир Витальевич Жарков
Дмитрий Дмитриевич Завьялов

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ЛЕДОВЫХ УСЛОВИЯХ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
«МОРСКОЙ ГИДРОФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ РАН»

Подписано в печать 21.06.2019.
Формат 70x100/16. Усл. печ. л. 16,58.
Тираж 100 экз. Заказ № 77.

Отпечатано: ИП Зуева Т.В. ИНН 910900137873
г. Симферополь, ул. Декабристов, 8/2,
8 (978) 717-31-40, itakemake@yandex.ru

УДК 551.46: 532.59: 539.3
ББК 26.221
Б90

ISBN 978-5-9908460-7-4